

Analisis RK4, Improved Euler, Adams-Bashforth dan ode45 pada Fase Jatuh Bebas *Bungee Jumping* menggunakan MATLAB

Adhi Surya Nugraha

Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Sanata Dharma, Indonesia

e-mail: a.s.nugraha@usd.ac.id

Abstrak

Fase awal bungee jumping dapat dimodelkan sebagai gerak jatuh dengan hambatan udara kuadratik. Model tersebut digunakan untuk membandingkan Runge-Kutta orde empat (RK4), Improved Euler, Adams-Bashforth orde empat, dan solver adaptif RK45 (ode45). Persamaan geraknya diturunkan dari Hukum II Newton dan memiliki solusi analitik, sehingga galat numerik dapat dihitung secara langsung. Simulasi memakai massa 68,1 kg, percepatan gravitasi 9,81 m/s², koefisien hambat 0,25 kg/m, dan interval waktu 0-10 detik. Tiga metode langkah tetap diuji pada $h = 0,5, 1, \text{ dan } 2$ detik. Ode45 dijalankan dengan RelTol 10^{-10} dan AbsTol 10^{-12} . Pada $h = 0,5$, galat maksimum RK4 sebesar $6,7 \times 10^{-5}$, lebih kecil daripada Adams-Bashforth sebesar $2,679 \times 10^{-3}$ dan Improved Euler sebesar $6,1732 \times 10^{-2}$. Orde konvergensi empiris RK4 dan Adams-Bashforth mendekati empat, sedangkan Improved Euler mendekati dua. Pada toleransi yang digunakan, galat maksimum ode45 berada pada orde 10^{-9} karena langkah internalnya diatur secara adaptif. Hasil ini memperlihatkan bahwa pilihan metode perlu mempertimbangkan akurasi, ukuran langkah, dan cara solver mengendalikan galat.

Kata kunci—Bungee Jumping, Metode Numerik, Orde Konvergensi, Rk4, Ode45.

1. PENDAHULUAN

Banyak fenomena fisik dirumuskan dalam bentuk persamaan diferensial. Persamaan tersebut kadang dapat diselesaikan secara analitik, tetapi pada model yang lebih rumit penyelesaian numerik menjadi pilihan yang lebih praktis. Karena itu, proses pemodelan tidak berhenti pada pembentukan persamaan; asumsi, parameter, dan metode penyelesaiannya juga perlu diperiksa. Chapra (2012) menempatkan hubungan antara masalah fisik, model matematis, dan prosedur komputasi sebagai bagian penting dalam analisis numerik.

Fase awal bungee jumping memberi contoh yang sederhana namun cukup representatif. Sebelum tali meregang, gerak pelompat terutama ditentukan oleh gaya berat dan hambatan udara. Jika hambatan diasumsikan kuadratik terhadap kecepatan, modelnya berupa persamaan diferensial biasa nonlinier orde satu. Dari model ini dapat diamati dua perilaku utama: kecepatan bertambah cepat pada awal jatuh dan kemudian mendekati kecepatan terminal.

Untuk persoalan nilai awal semacam ini tersedia banyak skema numerik. RK4 menggunakan empat estimasi kemiringan pada setiap langkah dan dikenal akurat untuk solusi yang halus. Improved Euler lebih ringkas karena hanya memakai dua tahap. Adams-Bashforth orde empat berbeda dari keduanya karena menggunakan informasi beberapa titik sebelumnya, sedangkan ode45 mengubah langkah internal berdasarkan estimasi galat. Perbedaan struktur tersebut berpengaruh pada ketelitian dan jumlah evaluasi fungsi (Burden & Faires, 2011; Butcher, 2016; Iserles, 2009).

Kajian mengenai penyelesaian ODE terus berkembang, baik melalui analisis galat metode klasik maupun pengembangan skema Runge-Kutta dan integrator adaptif. Abdul-Hassan et al. (2024), Abdulsalam et al. (2024), Jerray (2022) dan Montijano et al. (2023) menunjukkan bahwa orde metode dan pengendalian langkah tetap menjadi dua aspek penting ketika akurasi komputasi dievaluasi.

Penerapan pada masalah nyata juga menunjukkan bahwa metode dengan galat terkecil belum tentu mempunyai biaya per langkah yang paling rendah. Pola ini tampak pada studi komparatif ODE, gerak partikel dalam fluida, dan estimasi infiltrasi (Ali et al. 2024; Big-Alabo & Ofodu, 2024; Nugraha et al. 2025; Tasinaffo

et al., 2024, 2025). Untuk model jatuh bebas bungee jumping, perbandingan tiga metode langkah tetap dengan satu solver adaptif dalam grid pelaporan yang sama masih jarang disajikan secara bersamaan.

Artikel ini menggunakan solusi analitik sebagai tolok ukur sehingga selisih tiap hasil numerik dapat dihitung tanpa membangun solusi referensi tambahan. Yang dibandingkan bukan hanya profil kecepatan, melainkan juga galat maksimum, galat rata-rata, perubahan galat akibat pembesaran langkah, orde konvergensi empiris, dan kebutuhan evaluasi fungsi secara teoritis. Fokusnya adalah validasi komparatif yang mudah direplikasi, bukan pengembangan solver baru.

Penelitian terdahulu telah membandingkan sebagian metode tersebut pada konteks yang berbeda. Ali et al. (2024) membandingkan RK4, Adams-Bashforth, Adams-Moulton, dan keluaran MATLAB pada contoh ODE orde pertama dan kedua, tetapi tidak memasukkan Improved Euler, tidak menghitung orde konvergensi empiris, dan tidak menggunakan model jatuh bebas dengan hambatan kuadratik. Nugraha et al. (2025) mengevaluasi Euler, Heun, RK4, dan Adams-Bashforth pada model infiltrasi Horton serta menunjukkan kompromi antara akurasi dan biaya komputasi, namun tidak menyertakan solver adaptif. Big-Alabo dan Ofodu (2024) mengkaji jatuh bebas partikel dalam fluida dengan continuous piecewise linearization, bukan melalui perbandingan metode langkah tetap dan ode45.

Berdasarkan pemetaan tersebut, celah penelitian yang ditangani adalah belum tersedianya hasil yang menempatkan Improved Euler, RK4, Adams-Bashforth orde empat, dan ode45 pada satu model nonlinier yang memiliki solusi analitik, menggunakan titik pelaporan yang sama, dan menguji beberapa ukuran langkah untuk memverifikasi orde empiris. Keempat metode mewakili strategi yang berbeda, yaitu metode satu-langkah orde dua, metode satu-langkah orde empat, metode multilangkah orde empat, dan solver dengan langkah internal adaptif.

Kebaruan penelitian ini terletak pada penyusunan kerangka validasi terpadu yang menghubungkan galat maksimum dan rata-rata, sensitivitas terhadap pembesaran langkah, orde konvergensi empiris, pengaruh inisialisasi RK4 pada Adams-Bashforth, serta perbedaan antara langkah integrasi tetap dan grid keluaran ode45. Kontribusi ilmiahnya ialah menyediakan bukti numerik bahwa performa solver tidak cukup dinilai dari galat akhir saja, tetapi harus dibaca bersama orde metode dan strategi pengendalian langkah. Secara praktis, hasil penelitian dapat menjadi acuan pemilihan solver untuk pembelajaran metode numerik, simulasi pada grid tetap, dan penyelesaian adaptif ODE nonstiff.

Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini bertujuan menilai akurasi RK4, Improved Euler, Adams-Bashforth orde empat, dan ode45 pada model fase jatuh bebas bungee jumping. Hasil perbandingan diharapkan membantu memilih metode untuk ODE nonlinier yang halus dan nonstiff, khususnya ketika tersedia solusi eksak sebagai pembanding.

2. METODE PENELITIAN

2.1 Model matematika

Selama tali belum meregang, gaya yang diperhitungkan adalah gaya gravitasi ke bawah dan gaya hambat udara ke atas. Dengan arah ke bawah sebagai arah positif, Hukum II Newton memberikan

$$m \frac{dv}{dt} = mg - c_d v^2 \quad (1)$$

Pada Persamaan (1), m adalah massa pelompat, g menyatakan percepatan gravitasi, c_d merupakan koefisien hambat, dan $v(t)$ adalah kecepatan pada waktu t . Setelah kedua ruas dibagi dengan m , diperoleh

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m} v^2 \quad (2)$$

dengan kondisi awal

$$v(0) = 0 \quad (3)$$

Persamaan tersebut masih dapat diselesaikan secara analitik. Untuk kondisi awal pada Persamaan (3), solusinya adalah

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{c_d}} \tanh\left(\sqrt{\frac{g c_d}{m}} t\right) \quad (4)$$

Dari solusi itu, kecepatan terminal teoritis ditentukan oleh

$$v_T = \sqrt{\frac{mg}{c_d}} = 51.6938 \text{ m/s} \quad (5)$$

Nilai kecepatan terminal dipakai untuk membaca kecenderungan solusi ketika waktu bertambah.

2.2 Metode numerik

2.2.1 Runge-Kutta orde empat

Untuk persoalan nilai awal $v' = f(t, v)$, satu langkah RK4 dihitung melalui

$$k_1 = hf(t_n, v_n) \quad (6)$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, v_n + \frac{k_1}{2}\right) \quad (7)$$

$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, v_n + \frac{k_2}{2}\right) \quad (8)$$

$$k_4 = hf(t_n + h, v_n + k_3) \quad (9)$$

serta pembaruan

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (10)$$

$f(t, v) = g - (c_d/m)v^2$. Fungsi tersebut digunakan pada seluruh skema numerik.

2.2.2 Improved Euler

Improved Euler diterapkan dalam bentuk prediktor-korektor dua tahap berikut.

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2}[f(t_n, v_n) + f(t_n + h, v_n + hf(t_n, v_n))] \quad (11)$$

Skema ini memperbaiki Euler biasa dengan merata-ratakan kemiringan awal dan kemiringan pada titik prediksi. Jumlah tahapnya lebih sedikit daripada RK4, sehingga orde ketelitiannya juga lebih rendah.

2.2.3 Adams-Bashforth orde empat

Skema Adams-Bashforth orde empat yang digunakan adalah

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{24}[55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}] \quad (12)$$

dengan $f_j = f(t_j, v_j)$. Karena rumus ini memerlukan empat informasi sebelumnya, tiga nilai awal tambahan dihitung dengan RK4. Adams-Bashforth baru digunakan mulai langkah berikutnya.

2.2.4 2.2.4 Solver adaptif RK45 (ode45)

Di MATLAB, ode45 menerapkan pasangan Runge-Kutta tertanam Dormand-Prince orde 4(5). Dua aproksimasi berbeda orde dipakai untuk memperkirakan galat lokal, lalu solver menyesuaikan langkah internalnya (Dormand & Prince, 1980; Shampine & Reichelt, 1997). Simulasi menggunakan RelTol = 10^{-10} dan AbsTol = 10^{-12} . Vektor tspan = 0:h:10 hanya menetapkan waktu keluaran; nilai h pada vektor tersebut bukan langkah internal ode45.

2.3 Parameter simulasi dan ukuran galat

Parameter yang dipakai tercantum pada Tabel 1. Nilai massa $m = 68,1$ kg dan koefisien hambat $c_d = 0,25$ kg/m diadaptasi dari contoh bungee jumper dengan hambatan kuadratik pada Chapra (2012). Nilai $g = 9,81$ m/s² digunakan sebagai percepatan gravitasi standar. Interval $0 \leq t \leq 10$ s dipilih karena mencakup fase transien saat kecepatan meningkat dari nol hingga 49,4214 m/s dan mulai mendekati kecepatan terminal teoritis sekitar 51,6938 m/s, tetapi model masih dibatasi pada fase sebelum tali meregang. Ukuran langkah $h = 0,5, 1$, dan 2 s membentuk urutan penggandaan yang memungkinkan perhitungan orde konvergensi empiris sekaligus menunjukkan pengaruh grid halus, sedang, dan kasar. Untuk RK4, Improved Euler, dan Adams-Bashforth, h merupakan langkah integrasi tetap. Pada ode45, nilai yang sama hanya menjadi jarak antartitik pelaporan karena langkah internal tetap ditentukan oleh toleransi. Oleh sebab itu, ode45 diposisikan sebagai pembanding adaptif, bukan metode dengan biaya komputasi yang disetarakan.

Tabel 1. Parameter simulasi

Parameter	Nilai	Satuan
Massa pelompat, m	68,1	kg
Percepatan gravitasi, g	9,81	m/s ²
Koefisien hambat, c_d	0,25	kg/m
Interval waktu	0 sampai 10	s
Ukuran langkah, h	0,5; 1; 2	s

Galat absolut dihitung menggunakan

$$E(t_n) = |v_{\text{eksak}}(t_n) - v_n| \quad (13)$$

Galat maksimum dan galat rata-rata dihitung pada seluruh titik grid. Untuk metode langkah tetap, galat maksimum pada dua nilai h yang berurutan juga digunakan untuk memperkirakan orde konvergensi empiris. Solusi ode45 dievaluasi pada waktu pelaporan yang sama agar nilai kecepatannya dapat dibandingkan langsung, walaupun langkah internalnya berbeda.

2.4 Kompleksitas komputasi relatif metode langkah tetap

Jumlah evaluasi fungsi memberi gambaran awal tentang biaya tiap metode langkah tetap. RK4 memerlukan empat evaluasi per langkah dan Improved Euler memerlukan dua. Setelah tahap awal selesai, Adams-Bashforth orde empat cukup menghitung satu evaluasi fungsi baru. Angka tersebut dipakai sebagai ukuran biaya relatif, bukan sebagai pengganti waktu eksekusi. Ode45 tidak dicantumkan pada Tabel 2 karena jumlah langkah internalnya berubah mengikuti toleransi (Butcher, 2016; Iserles, 2009).

Tabel 2. Kebutuhan evaluasi fungsi per langkah

Metode	Evaluasi fungsi per langkah	Karakter umum
RK4	4	Akurasi tinggi, empat evaluasi fungsi
Improved Euler	2	Sederhana, metode orde dua
Adams-Bashforth orde 4	1*	Satu evaluasi baru setelah inisialisasi

*Catatan: Adams-Bashforth orde empat memerlukan nilai awal yang pada penelitian ini dihitung dengan RK4.

2.5 Prosedur komputasi

Perhitungan disusun dengan parameter yang sama dan menggunakan aritmetika presisi ganda. Skrip menggunakan fungsi dasar MATLAB dan ode45 tanpa toolbox tambahan serta ditulis agar kompatibel dengan MATLAB R2021a atau versi yang lebih baru. Karena penelitian tidak membandingkan waktu eksekusi, spesifikasi prosesor dan RAM tidak digunakan sebagai variabel analisis; reproduksibilitas dijaga melalui penyediaan skrip dan parameter komputasi yang lengkap. Urutan kerja yang dipakai adalah sebagai berikut.

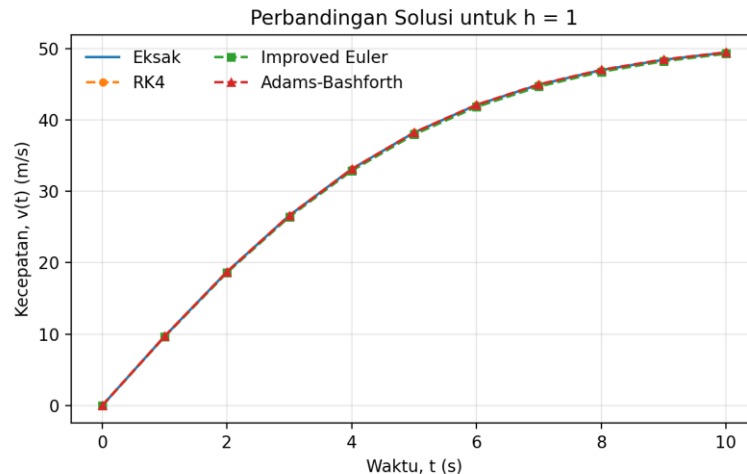
Urutan kerja yang dipakai adalah sebagai berikut.

1. Menetapkan parameter m , g , c_d , kondisi awal $v(0) = 0$, interval waktu, dan solusi analitik sebagai acuan.
2. Menghitung solusi RK4 dan Improved Euler untuk $h = 0,5$, $h = 1$, dan $h = 2$ pada interval $0 \leq t \leq 10$ s.
3. Menghasilkan tiga nilai awal Adams-Bashforth orde empat menggunakan RK4, kemudian melanjutkan perhitungan dengan skema multistep.
4. Menjalankan ode45 pada titik pelaporan yang sama dengan $\text{RelTol} = 10^{-10}$ dan $\text{AbsTol} = 10^{-12}$, sementara langkah internal dipilih secara adaptif.
5. Menghitung galat absolut, galat maksimum, galat rata-rata, dan orde konvergensi empiris untuk metode langkah tetap.
6. Menyajikan hasil dalam tabel dan grafik, kemudian memeriksa kembali keluaran menggunakan skrip reproduksi MATLAB.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Profil solusi analitik dan numerik untuk $h = 1$

Pada $h = 1$, perbedaan ketiga metode langkah tetap belum mudah terlihat dari kurva kecepatan (Gambar 1). Titik-titik RK4 hampir menutup solusi analitik. Adams-Bashforth mengikuti kurva yang sama, meskipun selisih kecil mulai muncul setelah skema multistep digunakan. Improved Euler juga mempertahankan bentuk kurva, tetapi jaraknya dari solusi analitik lebih jelas pada bagian tengah interval.



Gambar 1. Perbandingan solusi analitik dan numerik untuk $h = 1$.

Semua metode masih menangkap perilaku fisis model. Kecepatan bertambah tajam pada awal jatuh, kemudian kenaikannya melambat. Penyebabnya dapat dibaca langsung dari suku hambat kuadratik, ketika v membesar, gaya hambat ikut membesar dan percepatan bersih mengecil. Jadi, perbedaan antarmetode pada tahap ini terutama terletak pada ketelitian kuantitatif, bukan pada bentuk umum solusi.

3.2 Nilai numerik pada titik grid untuk $h = 1$

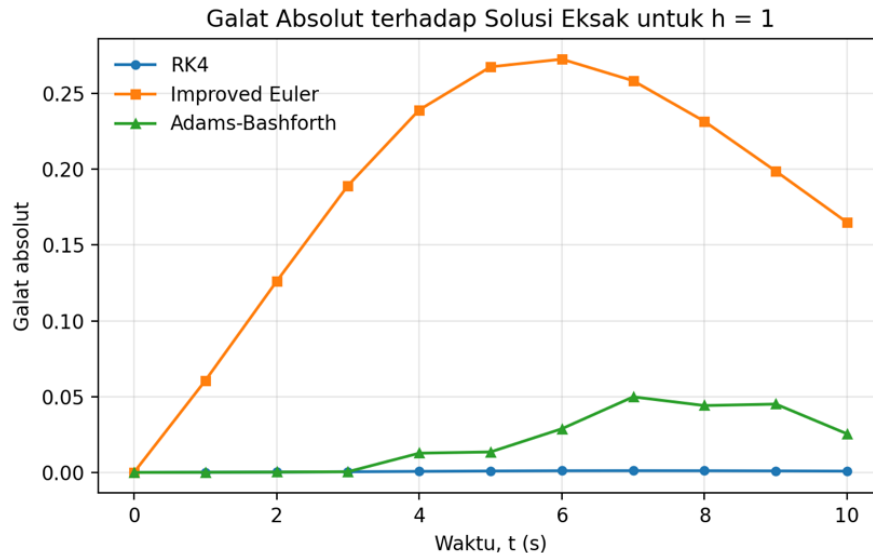
Tabel 3 memberi gambaran yang lebih rinci daripada grafik. Nilai RK4 berbeda sangat kecil dari solusi eksak pada setiap waktu. Untuk Adams-Bashforth, selisih mulai tampak setelah $t = 3$ s, yaitu sesudah tiga nilai awal dari RK4 tersedia. Improved Euler menghasilkan nilai yang lebih rendah daripada solusi eksak hampir di seluruh interval dan deviasinya paling besar terjadi pada waktu menengah.

Tabel 3. Hasil perhitungan untuk $h = 1$

t (s)	Eksak	RK4	Improved Euler	Adams-Bashforth
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	9,6939	9,6938	9,6334	9,6938
2	18,7292	18,7289	18,6032	18,7289
3	26,6148	26,6143	26,4257	26,6143
4	33,1118	33,1111	32,8727	33,0991
5	38,2154	38,2144	37,9479	38,2289
6	42,0762	42,0751	41,8037	42,1051
7	44,9145	44,9133	44,6562	44,9644
8	46,9575	46,9563	46,7260	47,0016
9	48,4058	48,4047	48,2071	48,4509
10	49,4214	49,4205	49,2565	49,4468

3.3 Analisis galat

Pola galat pada $h = 1$ ditampilkan pada Gambar 2. Kurva RK4 berada sangat dekat dengan sumbu horizontal. Galat Improved Euler naik sampai sekitar $t = 6$ s sebelum turun perlahan, sedangkan galat Adams-Bashforth menjadi nyata setelah rumus multistep mulai digunakan.



Gambar 2. Galat absolut terhadap solusi eksak untuk $h = 1$.

Perbedaan tersebut sesuai dengan cara setiap skema membentuk aproksimasi. Perbedaan tersebut dapat dijelaskan melalui galat pemotongan. Improved Euler mempunyai galat lokal $O(h^3)$ dan galat global $O(h^2)$, sedangkan RK4 serta Adams-Bashforth orde empat mempunyai galat lokal $O(h^5)$ dan galat global $O(h^4)$ (Burden & Faires, 2011; Butcher, 2016; Iserles, 2009). Karena itu, pada daerah asimtotik, pembesaran langkah dua kali diperkirakan meningkatkan galat metode orde dua sekitar $2^2 = 4$ kali dan metode orde empat sekitar $2^4 = 16$ kali. Temuan bahwa RK4 lebih akurat dan Adams-Bashforth memberikan kompromi antara akurasi dan evaluasi fungsi juga sejalan dengan pola yang dilaporkan Nugraha et al. (2025), meskipun model aplikasi yang digunakan berbeda.

Rasio galat maksimum pada data mendukung penjelasan tersebut. Ketika h berubah dari 0,5 menjadi 1 dan dari 1 menjadi 2, galat Improved Euler meningkat sekitar 4,41 dan 4,95 kali. Pada RK4 kenaikannya sekitar 17,78 dan 19,33 kali, sedangkan pada Adams-Bashforth sekitar 18,61 dan 15,34 kali. Nilai tersebut mendekati faktor teoretis masing-masing orde, walaupun tidak identik karena galat yang dipakai adalah galat maksimum pada interval terbatas, setiap metode memiliki konstanta galat berbeda, dan hasil Adams-Bashforth dipengaruhi oleh tiga nilai awal dari RK4.

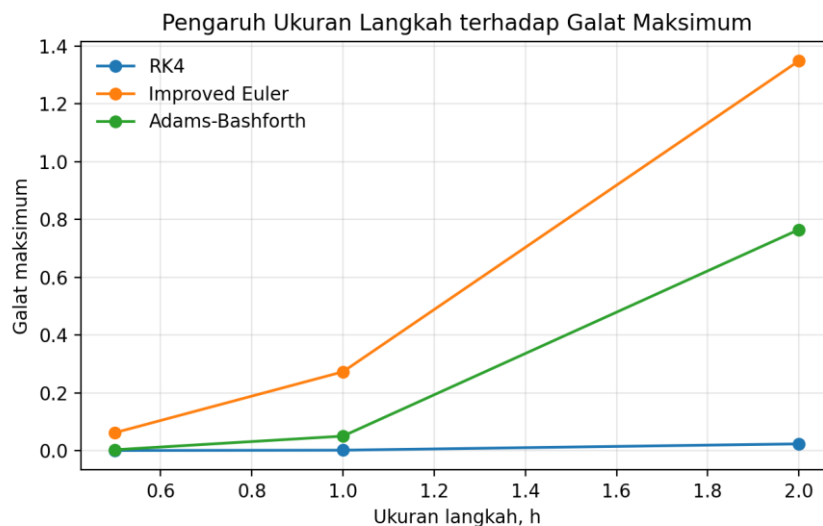
Empat estimasi kemiringan pada RK4 membuat galat diskretisasinya kecil untuk solusi yang halus. Improved Euler hanya memanfaatkan dua kemiringan. Adams-Bashforth menggunakan informasi historis sehingga hanya membutuhkan satu evaluasi baru per langkah, tetapi kualitas hasilnya lebih peka terhadap ukuran langkah dan nilai awal. Karakter ini sejalan dengan pembahasan Burden & Faires (2011), Butcher (2016), Iserles (2009).

Data pada Tabel 4 memperlihatkan dua hal. Pertama, RK4 selalu memberi galat maksimum dan rata-rata paling kecil di antara metode langkah tetap. Kedua, semua galat membesar ketika h dinaikkan. Besarnya kenaikan tidak sama karena tiap metode memiliki orde konvergensi yang berbeda.

Tabel 4. Ringkasan galat metode langkah tetap

h	Metode	Galat maksimum	Galat rata-rata
0,5	RK4	0,000067	0,000043
0,5	Improved Euler	0,061732	0,042641
0,5	Adams-Bashforth	0,002679	0,001495
1	RK4	0,001191	0,000726
1	Improved Euler	0,272531	0,182557
1	Adams-Bashforth	0,049847	0,020041
2	RK4	0,023019	0,013185
2	Improved Euler	1,348770	0,851282
2	Adams-Bashforth	0,764707	0,148441

Kecenderungan tersebut tampak lebih jelas pada Gambar 3. Dari $h = 0,5$ ke $h = 2$, kurva Improved Euler dan Adams-Bashforth naik cukup tajam. Kurva RK4 juga meningkat, tetapi tetap berada jauh di bawah keduanya. Dalam konteks percobaan ini, RK4 paling tidak sensitif terhadap pembesaran langkah.



Gambar 3. Pengaruh ukuran langkah terhadap galat maksimum metode langkah tetap.

3.4 Orde konvergensi empiris

Orde konvergensi empiris diperkirakan dari galat maksimum pada dua ukuran langkah yang berurutan. Nilai p dihitung dengan

$$p = \log \left(\frac{E_h^2}{E_h} \right) / \log 2 \quad (14)$$

Tabel 5. Orde konvergensi empiris metode langkah tetap

Metode	p (0,5→1)	p (1→2)	Orde teoretis
RK4	4,15	4,27	4
Improved Euler	2,14	2,31	2
Adams-Bashforth	4,22	3,94	4

Nilai pada Tabel 5 mendukung hasil perhitungan galat. RK4 memberikan $p = 4,15$ dan $4,27$, sedangkan Adams-Bashforth menghasilkan $p = 4,22$ dan $3,94$. Keduanya dekat dengan orde teoretis empat. Untuk Improved Euler diperoleh $p = 2,14$ dan $2,31$, sesuai dengan metode orde dua. Selisih kecil dari nilai bulat wajar muncul karena orde tersebut dihitung dari tiga ukuran langkah yang terbatas dan menggunakan galat maksimum pada interval tertentu.

Nilai pada Tabel 5 mendukung hasil perhitungan galat. RK4 memberikan $p = 4,15$ dan $4,27$, sedangkan Adams-Bashforth menghasilkan $p = 4,22$ dan $3,94$; keduanya dekat dengan orde teoretis empat. Improved

Euler memberikan $p = 2,14$ dan $2,31$, sesuai dengan metode orde dua. Hasil ini konsisten dengan teori konvergensi yang dirangkum Burden dan Faires (2011), Butcher (2016), serta Iserles (2009). Ali et al. (2024) juga melaporkan kedekatan hasil RK4 dan Adams-Bashforth terhadap solusi MATLAB pada contoh ODE yang mereka uji, tetapi tidak menghitung orde empiris. Dengan demikian, penelitian ini menambahkan verifikasi kuantitatif orde melalui tiga ukuran langkah. Penyimpangan kecil dari nilai bulat dipengaruhi oleh jumlah ukuran langkah yang terbatas, penggunaan galat maksimum, dan prosedur inisialisasi metode multilangkah.

3.5 Diskusi metode langkah tetap

Di antara tiga metode langkah tetap, RK4 paling konsisten. Galat maksimumnya hanya $6,7 \times 10^{-5}$ pada $h = 0,5$ dan menjadi $0,0230$ pada $h = 2$. Walaupun meningkat, nilainya masih jauh di bawah dua metode lain. Orde empiris yang mendekati empat memperkuat bahwa program RK4 bekerja sesuai karakter teoretisnya.

Improved Euler menunjukkan pola yang berbeda. Pada $h = 2$, galat maksimumnya mencapai $1,3488$. Nilai ini membatasi penggunaannya ketika ketelitian menjadi tuntutan utama. Namun, skema dua tahapnya mudah ditelusuri dan orde empirisnya mendekati dua, sehingga metode tersebut tetap berguna untuk pengenalan algoritma ODE dan sebagai estimasi awal.

Hasil Adams-Bashforth berada di antara keduanya. Galat maksimum pada $h = 0,5$ adalah $0,002679$, tetapi kenaikannya cukup besar pada $h = 1$ dan $h = 2$. Perlu dicatat bahwa tiga titik pertama berasal dari RK4. Pengaruh tahap awal ini makin terasa ketika interval hanya memuat sedikit langkah, terutama pada $h = 2$.

Keuntungan Adams-Bashforth terlihat pada jumlah evaluasi fungsi setelah inisialisasi. Satu langkah hanya memerlukan satu evaluasi baru, dibandingkan dua pada Improved Euler dan empat pada RK4. Karena waktu eksekusi tidak diukur, hasil tersebut belum cukup untuk menyatakan metode mana yang paling efisien secara aktual. Yang dapat disimpulkan hanyalah adanya pertukaran antara ketelitian dan biaya per langkah.

3.6 Pertimbangan pemilihan solver dan pengembangan model

Pilihan solver sebaiknya mengikuti kebutuhan simulasi. Ketika keluaran diperlukan pada grid tetap dan galat kecil menjadi prioritas, RK4 merupakan pilihan yang masuk akal. Adams-Bashforth dapat dipertimbangkan untuk perhitungan berulang dengan langkah kecil, terutama jika nilai awal yang baik telah tersedia. Improved Euler lebih sesuai untuk implementasi sederhana atau kegiatan pembelajaran.

Pada model yang halus dan nonstiff, ode45 menawarkan cara lain karena langkah internal tidak harus seragam. Solver memperkecil langkah ketika estimasi galat meningkat dan memperbesarnya saat solusi berubah perlahan. Untuk interval yang lebih panjang, Adams-Bashforth-Moulton atau ode113 juga dapat menjadi pembanding yang menarik.

Model akan berubah cukup banyak ketika tali mulai meregang. Posisi dan kecepatan perlu dihitung bersamaan, sementara gaya pegas dan redaman harus ditambahkan. Jika konstanta pegas atau redaman besar, sistem mungkin menjadi lebih sensitif dan dapat mengarah pada persoalan stiff. Pada kondisi seperti itu, solver implisit atau ode15s lebih layak diuji.

Dengan kata lain, angka galat pada penelitian ini tidak dapat dipisahkan dari sifat model dan strategi integrasi yang digunakan. Metode yang baik untuk fase jatuh bebas belum tentu menjadi pilihan terbaik ketika dinamika tali sudah dimasukkan.

3.7 Perbandingan dengan solver adaptif ode45

Ode45 digunakan untuk melihat kinerja solver adaptif pada model yang sama. Solver ini berbasis pasangan Dormand-Prince 4(5) dan lazim dipakai untuk ODE nonstiff (Dormand & Prince, 1980; Shampine & Reichelt, 1997). Karena model jatuh bebas menghasilkan solusi yang halus, mekanisme pengaturan langkah ode45 dapat bekerja tanpa menghadapi perubahan solusi yang tidak kontinu.

Pada titik pelaporan yang diuji, galat maksimum ode45 lebih kecil daripada galat metode langkah tetap. Namun, ode45 menggunakan RelTol 10^{-10} , AbsTol 10^{-12} , dan langkah internal adaptif, sedangkan tiga metode lain menggunakan langkah tetap yang relatif besar. Oleh sebab itu, Tabel 6 hanya membandingkan akurasi nilai keluaran pada waktu yang sama dan tidak dapat digunakan untuk menyimpulkan efisiensi

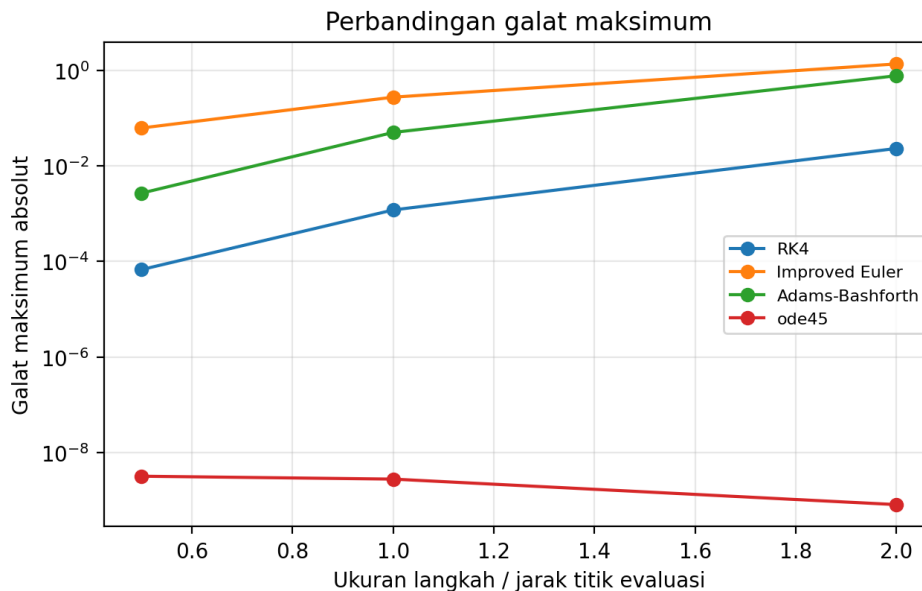
komputasi secara langsung. Evaluasi efisiensi yang setara memerlukan jumlah evaluasi fungsi, jumlah langkah yang diterima dan ditolak, serta waktu eksekusi aktual.

Tabel 6. Perbandingan galat maksimum seluruh metode

h	RK4	Improved Euler	Adams-Bashforth	ode45
0,5	6,74E-05	0,061732	0,002679	3,20E-09
1,0	0,001191	0,272531	0,049847	2,78E-09
2,0	0,023019	1,348770	0,764707	8,15E-10

Galat maksimum ode45 pada Tabel 6 berada pada orde 10^{-9} . Angka h pada kolom pertama hanya menyatakan jarak waktu keluaran. Karena langkah integrasi internal tidak sama dengan jarak tersebut, perubahan h pelaporan tidak menghasilkan pola galat monoton seperti pada RK4, Improved Euler, dan Adams-Bashforth.

Skala logaritmik pada Gambar 4 membuat selisih antarmetode lebih mudah dilihat. Tiga kurva langkah tetap meningkat saat h diperbesar, sedangkan titik ode45 tetap berada di sekitar orde 10^{-9} . Grafik ini menunjukkan perbedaan mekanisme pengendalian galat; grafik tersebut tidak digunakan untuk menyatakan kesamaan biaya komputasi.



Gambar 4. Perbandingan galat maksimum untuk seluruh metode.

3.8 Reprodusibilitas komputasi pada MATLAB

Perhitungan dapat diperiksa kembali menggunakan skrip MATLAB `bungee_ode45_matlab_repro.m`. Bagian ode45 mengatur toleransi melalui `odeset` dan meminta keluaran pada waktu yang sama dengan grid metode langkah tetap. Potongan kode utamanya ditulis sebagai berikut.

```
odefun = @(t,v) g - (cd/m)*v.^2;
v0 = 0;
tgrid = 0:h:10;
opts = odeset('RelTol',1e-10,'AbsTol',1e-12);
[t_ode45, v_ode45] = ode45(odefun, tgrid, v0, opts);
v_exact = sqrt(g*m/cd).*tanh(sqrt(g*cd/m).*t_ode45);
err_ode45 = abs(v_exact - v_ode45);
```

Pada kode tersebut, h hanya mengatur tgrid. Ode45 tetap menentukan sendiri langkah integrasi yang diperlukan untuk memenuhi toleransi. Cara ini membuat solusi tersedia pada waktu yang sama dengan metode langkah tetap, tanpa mengubah sifat adaptif solver.

3.9 Keterbatasan dan implikasi pemilihan metode

Ada beberapa batasan yang perlu dicatat. Model berhenti pada fase sebelum tali meregang dan hanya menggunakan satu kombinasi parameter fisik. Hasil Adams-Bashforth dipengaruhi oleh tiga nilai awal dari RK4, terutama pada h besar ketika jumlah langkah sedikit. Biaya komputasi juga belum diukur melalui waktu eksekusi atau jumlah evaluasi fungsi aktual, sedangkan galat ode45 diperoleh dengan toleransi sangat ketat. Konsekuensinya, urutan performa metode pada penelitian ini tidak dapat langsung digeneralisasikan ke fase peregang dan osilasi tali, sistem stiff, parameter hambatan yang berbeda, atau interval integrasi yang lebih panjang. Rekomendasi yang diberikan dibatasi pada model satu persamaan yang halus, nonstiff, dan memiliki solusi analitik.

Dengan batasan tersebut, Tabel 7 merangkum penggunaan yang paling masuk akal untuk tiap metode berdasarkan hasil akurasi, orde empiris, dan jumlah evaluasi fungsi secara teoritis.

Tabel 7. Implikasi pemilihan metode numerik

Metode	Karakteristik hasil	Rekomendasi penggunaan
RK4	Galat terkecil di antara metode langkah tetap; orde empiris mendekati empat.	Simulasi langkah tetap ketika akurasi menjadi prioritas.
Improved Euler	Skema sederhana; orde empiris mendekati dua; galat paling besar.	Pembelajaran metode numerik dan estimasi awal.
Adams-Bashforth	Orde empiris mendekati empat; satu evaluasi fungsi baru setelah inisialisasi; sensitif pada h besar.	Komputasi berulang dengan langkah kecil dan nilai awal yang baik.
ode45	Langkah internal adaptif; galat sangat kecil pada toleransi ketat.	Model halus dan nonstiff dengan toleransi sesuai kebutuhan.

Ringkasan tersebut menunjukkan bahwa tidak terdapat satu metode yang selalu paling sesuai untuk seluruh tujuan. RK4 unggul untuk akurasi pada grid tetap, Improved Euler relevan untuk pembelajaran, Adams-Bashforth menarik ketika evaluasi fungsi berulang perlu dikurangi, sedangkan ode45 sesuai ketika adaptivitas langkah dibutuhkan pada model nonstiff.

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Penelitian ini menghasilkan hasil terverifikasi untuk membandingkan tiga metode langkah tetap dan satu *solver* adaptif pada model jatuh bebas dengan hambatan kuadratik. Pada $h = 0,5$, galat maksimum RK4 sebesar $6,7 \times 10^{-5}$, lebih kecil daripada Adams-Bashforth sebesar $2,679 \times 10^{-3}$ dan Improved Euler sebesar $6,1732 \times 10^{-2}$. Orde empiris RK4 dan Adams-Bashforth mendekati empat, sedangkan Improved Euler mendekati dua, sehingga implementasi numerik konsisten dengan teori. Pada toleransi yang digunakan, ode45 menghasilkan galat pada orde 10^{-9} , tetapi hasil tersebut bukan bukti efisiensi yang lebih tinggi karena langkah internal dan toleransinya berbeda dari metode langkah tetap. Kontribusi utama penelitian adalah menunjukkan bahwa pemilihan *solver* perlu mempertimbangkan secara bersama-sama orde metode, ukuran langkah, prosedur inisialisasi metode multilangkah, dan strategi pengendalian galat. Untuk model halus dan nonstiff ini, RK4 merupakan pilihan langkah tetap yang paling akurat, sedangkan ode45 sesuai ketika adaptivitas diperlukan.

Penelitian berikutnya disarankan memasukkan gaya pegas dan redaman agar fase setelah tali meregang dapat dimodelkan sebagai sistem posisi-kecepatan. Pengujian juga perlu mencatat waktu eksekusi, jumlah evaluasi fungsi aktual, langkah ode45 yang diterima atau ditolak, beberapa pilihan toleransi, dan variasi parameter fisik. Perluasan tersebut akan memungkinkan perbandingan akurasi-biaya yang lebih setara dan menguji apakah rekomendasi metode tetap berlaku pada dinamika bungee jumping yang lebih kompleks.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdul-Hassan, N. Y., Kadum, Z. J., & Ali, A. H. (2024). An Efficient Third-Order Scheme Based on Runge–Kutta and Taylor Series Expansion for Solving Initial Value Problems. *Algorithms*, 17(3), 123. <https://doi.org/10.3390/a17030123>
- Abdulsalam, A., Senu, N., Abdul Majid, Z., & Nik Long, N. M. A. (2024). Development of High-Order Adaptive Multi-Step Runge–Kutta–Nyström Method for Solving Special Second-Order ODEs. *Mathematics and Computers in Simulation*, 216, 104–125. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2023.09.006>
- Ali, A. J., Abbas, A. F., & Abdelhakem, M. A. (2024). Comparative Analysis of Adams–Bashforth–Moulton and Runge–Kutta Methods for Solving Ordinary Differential Equations Using MATLAB. *Mathematical Modelling and Engineering Problems*, 11(3), 641–647. <https://doi.org/10.18280/mmep.110307>
- Big-Alabo, A., & Ofodu, J. C. (2024). Theoretical Investigation of the Free Fall of a Spherical Particle in a Viscous Fluid Using Continuous Piecewise Linearization Method. *Kuwait Journal of Science*, 51(2), 100211. <https://doi.org/10.1016/j.kjs.2024.100211>
- Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). *Numerical Analysis* (9th ed.). Brooks/Cole.
- Butcher, J. C. (2016). *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations* (3rd ed.). Wiley.
- Chapra, S. C. (2012). *Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists* (3rd ed.). McGraw-Hill.
- Dormand, J. R., & Prince, P. J. (1980). A Family of Embedded Runge–Kutta Formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 6(1), 19–26. [https://doi.org/10.1016/0771-050X\(80\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0771-050X(80)90013-3)
- Iserles, A. (2009). *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations* (2nd ed.). Cambridge University Press.
- Jerray, J. (2022). Asymptotic Error in Euler’s Method with a Constant Step Size. *European Journal of Control*, 68, 100694. <https://doi.org/10.1016/j.ejcon.2022.100694>
- Montijano, J. I., Rández, L., & Calvo, M. (2023). Explicit Runge–Kutta Methods for the Numerical Solution of Linear Inhomogeneous IVPs. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 425, 115083. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.115083>
- Nugraha, G. U., Bakti, H., Anatoly, N., Lubis, R. F., Utomo, W. B., & Ulfa, Y. (2025). Comparing Numerical Methods for Infiltration Estimation: A Statistical Approach to Accuracy and Efficiency. *Riset Geologi Dan Pertambangan*, 35(2), 185–202. <https://doi.org/10.55981/risetgeotam.2025.1394>
- Shampine, L. F., & Reichelt, M. W. (1997). The MATLAB ODE Suite. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18(1), 1–22. <https://doi.org/10.1137/S1064827594276424>
- Tasinaffo, P. M., Dias, L. A. V, & da Cunha, A. M. (2024). A Qualitative Approach to Universal Numerical Integrators with Computational Application. *Human-Centric Intelligent Systems*, 4, 571–598. <https://doi.org/10.1007/s44230-024-00087-x>
- Tasinaffo, P. M., Dias, L. A. V, & da Cunha, A. M. (2025). A Quantitative Approach to Universal Numerical Integrators with Computational Application. *Human-Centric Intelligent Systems*, 5, 1–20. <https://doi.org/10.1007/s44230-024-00084-0>