

Estimasi Kebutuhan Populasi *Lactobacillus casei* pada Industri Melalui Pendekatan Model Eksponensial

Andi Susanto^{1*}, Husna Fitri², Lusi Afrina³, Amanda Putri Sitompul⁴

^{1,2,3,4}Program Studi Tadris Matematika, Universitas Islam Negeri Imam Bonjol Padang, Indonesia
e-mail: adisusanto@uinib.ac.id

Abstrak

Lactobacillus casei merupakan bakteri asam laktat bernilai probiotik tinggi yang krusial dalam sektor industri, khususnya pada produksi susu fermentasi. Pengendalian populasi bakteri pada fase awal fermentasi sangat penting untuk mengoptimalkan efisiensi dan kualitas produk. Penelitian ini bertujuan mengkonstruksi model matematika dari dinamika populasi *L. casei* pada fase awal fermentasi serta memproyeksikan kebutuhan populasinya. Model diturunkan dari persamaan diferensial biasa (PDB) orde satu dan diselesaikan menggunakan metode pemisahan variabel. Karena tidak menggunakan pengujian laboratorium secara *in vivo*, penelitian ini menggunakan data simulasi numerik yang dirancang untuk merepresentasikan perilaku fase logaritmik bakteri pada periode observasi $t = 0 - 6$ jam. Estimasi parameter model dilakukan melalui pendekatan regresi linier terhadap data simulasi tersebut. Hasil analisis menghasilkan model pertumbuhan eksponensial $L(t) = 996.879 \cdot e^{0.3512t}$, dengan $R^2 = 0.9996$. Berdasarkan model ini, populasi bakteri diproyeksikan mencapai 11.649.482 sel/mL pada jam ke-7. Temuan ini menegaskan bahwa PDB orde satu efektif memodelkan fase eksponensial awal probiotik. Penggunaan data simulasi dalam studi ini juga membuktikan bahwa pendekatan matematis dapat diaplikasikan oleh industri untuk mengestimasi kebutuhan durasi fermentasi secara akurat dan efisien.

Kata kunci — *L casei*, Pertumbuhan, Persamaan Diferensial, Fermentasi, Regresi Linier, Susu Fermentasi.

1. PENDAHULUAN

Industri pangan fermentasi terus berkembang seiring meningkatnya kesadaran masyarakat terhadap konsumsi pangan fungsional yang tidak hanya memiliki nilai gizi, tetapi juga memberikan manfaat bagi kesehatan. Salah satu produk pangan fermentasi yang banyak dikonsumsi adalah susu fermentasi, yaitu produk hasil fermentasi susu yang melibatkan aktivitas bakteri asam laktat (*lactic acid bacteria*, LAB). Susu fermentasi dikenal sebagai produk susu yang bermanfaat bagi kesehatan, khususnya dalam mengatasi gangguan saluran pencernaan, karena mengandung bakteri asam laktat yang aman dikonsumsi (Purnomo et al., 2021). Untuk meningkatkan nilai fungsionalnya, telah dikembangkan pula formulasi produk susu fermentasi kering dengan penambahan bakteri probiotik seperti *Lactobacillus casei* dan *Bifidobacterium longum* (Rahman et al., 2012).

Salah satu bakteri asam laktat yang banyak dimanfaatkan dalam berbagai bidang industri adalah *Lactobacillus casei*. Bakteri ini merupakan bakteri gram positif berbentuk basil, bersifat anaerob fakultatif, serta tergolong sebagai bakteri probiotik penting dalam proses fermentasi karena mampu menghasilkan asam laktat hingga sekitar 90%, bakteriosin, dan asam organik lainnya. Bakteriosin sendiri merupakan senyawa protein bersifat antimikroba yang dihasilkan oleh *L. casei* dan bekerja dengan merusak membran sitoplasma sel bakteri patogen, sehingga susu fermentasi berbasis *L. casei* juga berpotensi menghambat pertumbuhan bakteri seperti *Escherichia coli* dan *Staphylococcus aureus* (Purnomo et al., 2021). Selain berperan sebagai antimikroba, *L. casei* diketahui membantu membatasi pertumbuhan bakteri patogen dalam saluran usus (Yulia et al., 2015).

Kajian klinis lain menunjukkan bahwa konsumsi susu fermentasi yang mengandung *L. casei* mampu meningkatkan kadar IgA pada tinja serta menurunkan tingkat inflamasi pada penderita sindrom iritasi usus besar, yang memperkuat hipotesis bahwa probiotik berperan dalam modulasi imun saluran cerna (Ubaidillah,

2025). Selain dimanfaatkan dalam industri farmasi dan kosmetik, *L. casei* juga banyak digunakan pada industri makanan dan minuman fermentasi, khususnya sebagai kultur pendamping (*adjunct culture*) dalam produksi susu fermentasi. Keberadaan *L. casei* pada susu fermentasi tidak hanya berperan dalam proses fermentasi, tetapi juga meningkatkan kualitas probiotik produk sehingga jumlah populasi bakteri selama fermentasi perlu dipertahankan pada kondisi optimum (Kondybayev et al., 2022).

Pertumbuhan *Lactobacillus casei* berlangsung melalui mekanisme pembelahan biner (*binary fission*), yaitu satu sel bakteri membelah menjadi dua sel anak dalam selang waktu tertentu yang dikenal sebagai waktu generasi (*generation time*) atau waktu penggandaan (*doubling time*). Laju pertumbuhan bakteri dipengaruhi oleh berbagai faktor, seperti suhu, pH, ketersediaan nutrisi, serta kondisi media pertumbuhan, dan secara umum terdiri atas empat fase, yaitu fase lag, fase logaritmik, fase stasioner, dan fase kematian. Pada fase logaritmik, laju pertumbuhan populasi dapat diasumsikan sebanding dengan jumlah populasi yang telah ada sehingga membentuk pola pertumbuhan eksponensial. (Kondybayev et al., 2022) melaporkan bahwa *L. casei* yang ditumbuhkan pada medium MRS memiliki laju pertumbuhan spesifik berkisar antara $0,66\text{--}0,68\text{ jam}^{-1}$, sementara (Fawzi et al., 2022) melaporkan bahwa *Lactobacillus casei* strain DSM 20011 pada medium berbasis susu memiliki laju pertumbuhan spesifik sebesar $0,181\text{ jam}^{-1}$ dengan waktu penggandaan sekitar 3,83 jam. Perbedaan nilai tersebut menunjukkan bahwa karakteristik pertumbuhan bakteri dipengaruhi oleh kondisi media fermentasi yang digunakan.

Pertumbuhan populasi bakteri yang berlangsung secara dinamis selama proses fermentasi memerlukan suatu pendekatan kuantitatif agar perubahan jumlah bakteri terhadap waktu dapat dipahami dan diprediksi secara lebih sistematis. Salah satu pendekatan yang banyak digunakan untuk menggambarkan dinamika pertumbuhan populasi adalah model pertumbuhan eksponensial yang diturunkan dari persamaan diferensial biasa orde satu. Pada fase logaritmik, laju perubahan jumlah populasi bakteri dapat diasumsikan sebanding dengan jumlah populasi pada saat tertentu sehingga diperoleh model $\left[\frac{dL}{dt} = kL\right]$ dengan $(L(t))$ menyatakan jumlah populasi bakteri pada waktu t dan k menyatakan laju pertumbuhan spesifik. Persamaan diferensial tersebut dapat diselesaikan menggunakan metode pemisahan variabel sehingga diperoleh model pertumbuhan eksponensial yang mampu menggambarkan perubahan populasi bakteri terhadap waktu.

Meskipun pemodelan pertumbuhan mikroba sering kali menggunakan model kurva sigmoidal yang lebih kompleks—seperti model Gompertz atau model Logistik—untuk memetakan keseluruhan fase pertumbuhan hingga tercapainya kapasitas tampung (*carrying capacity*) pada fase stasioner, penggunaan model eksponensial memiliki urgensi dan keunggulan tersendiri, khususnya pada fase awal fermentasi industri. Pada fase logaritmik awal, ketersediaan nutrisi masih sangat berlimpah dan akumulasi metabolit penghambat (seperti asam laktat) belum mencapai titik yang membatasi pertumbuhan sel. Dalam kondisi ini, model eksponensial menawarkan representasi matematis yang sangat akurat tanpa beban komputasi dari parameter tambahan asimtotik yang ada pada model Gompertz maupun Logistik. Kesederhanaan parameter dalam model eksponensial memungkinkan pihak industri melakukan estimasi waktu (*real-time prediction*) yang lebih cepat, efisien, dan praktis untuk memanen kultur pada kepadatan sel tertinggi sebelum memasuki fase penghambatan.

Berbagai penelitian telah mengkaji karakteristik pertumbuhan *Lactobacillus casei* pada berbagai media fermentasi. (Kondybayev et al., 2022) melaporkan laju pertumbuhan spesifik *Lactobacillus casei* pada medium MRS dalam kondisi optimum, sedangkan (Sun et al., 2022) menunjukkan bahwa kebutuhan nutrisi *Lactobacillus casei* pada media susu lebih kompleks dibandingkan medium sintesis sehingga memengaruhi laju pertumbuhannya. Penelitian (Fawzi et al., 2022) juga menunjukkan bahwa waktu penggandaan bakteri pada medium berbasis susu lebih lambat dibandingkan pada medium MRS. Hasil-hasil penelitian tersebut memberikan informasi penting mengenai karakteristik biologis pertumbuhan *Lactobacillus casei*, namun sebagian besar masih berfokus pada aspek mikrobiologi, optimasi media kultur, dan penentuan parameter pertumbuhan.

Meskipun demikian, penelitian yang mengintegrasikan karakteristik pertumbuhan *Lactobacillus casei* dengan pendekatan pemodelan matematika berbasis persamaan diferensial biasa masih relatif terbatas. Sebagian besar penelitian hanya melaporkan nilai laju pertumbuhan atau waktu penggandaan tanpa menyajikan proses penyusunan model matematika secara sistematis, mulai dari formulasi persamaan diferensial, penyelesaian model menggunakan metode analitik, estimasi parameter berdasarkan data pertumbuhan, hingga pemanfaatan model untuk memprediksi jumlah populasi bakteri pada waktu di luar periode pengamatan. Padahal, model matematika yang sederhana namun memiliki tingkat kesesuaian yang

tinggi dapat menjadi alat bantu untuk memahami dinamika pertumbuhan bakteri sekaligus mendukung pengambilan keputusan dalam proses fermentasi.

Berdasarkan permasalahan tersebut, penelitian ini mengkonstruksi model pertumbuhan eksponensial populasi *Lactobacillus casei* menggunakan persamaan diferensial biasa orde satu. Persamaan diferensial diselesaikan menggunakan metode pemisahan variabel sehingga diperoleh model umum pertumbuhan eksponensial. Selanjutnya, parameter model diestimasi menggunakan metode regresi linier terhadap transformasi logaritma natural data populasi bakteri sehingga diperoleh model spesifik yang menggambarkan hubungan antara waktu fermentasi dan jumlah populasi bakteri. Model yang diperoleh kemudian digunakan untuk memproyeksikan jumlah populasi bakteri pada waktu di luar periode pengamatan serta mengevaluasi tingkat kesesuaiannya terhadap data melalui koefisien determinasi (R^2).

Penelitian ini bertujuan untuk (1) mengkonstruksi model pertumbuhan eksponensial *Lactobacillus casei* berdasarkan persamaan diferensial biasa orde satu, (2) menentukan solusi model menggunakan metode pemisahan variabel, (3) mengestimasi parameter model menggunakan metode regresi linier terhadap data populasi bakteri, serta (4) memanfaatkan model yang diperoleh untuk memprediksi jumlah populasi *Lactobacillus casei* pada waktu di luar periode pengamatan. Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam penerapan pemodelan matematika pada bidang bioteknologi pangan, khususnya dalam menggambarkan dinamika pertumbuhan bakteri probiotik selama proses fermentasi susu, serta menjadi dasar bagi pengembangan model pertumbuhan mikroorganisme pada penelitian selanjutnya.

2. METODE PENELITIAN

2.1 Jenis dan Pendekatan Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif kuantitatif yang berfokus pada pemodelan matematis dinamika populasi bakteri. Pendekatan utama yang digunakan adalah pemodelan persamaan diferensial untuk pertumbuhan eksponensial. Prinsip dasar pemodelan ini didasarkan pada asumsi bahwa laju perubahan jumlah sel bakteri sebanding dengan jumlah sel pada saat tertentu. Penyelesaian analitik persamaan diferensial dilakukan menggunakan metode pemisahan variabel, dilanjutkan dengan estimasi parameter empiris menggunakan analisis regresi linier terhadap transformasi logaritma natural dari data populasi bakteri.

2.2 Sumber dan Jenis Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data simulasi jumlah populasi bakteri *Lactobacillus casei* pada interval waktu $t = 0$ hingga $t = 6$ jam. Penggunaan data simulasi dalam penelitian ini dipilih secara sengaja untuk mengisolasi proses validasi matematis dari galat teknis eksperimental (*experimental noise* yang tidak terprediksi) di laboratorium. Dengan demikian, fokus pengujian terhadap keandalan struktur model matematika dapat dievaluasi secara murni sebagai landasan teoretis sebelum diterapkan pada kondisi industri yang kompleks.

Untuk menjamin validitas ilmiah dan memastikan model tetap merepresentasikan perilaku biologis yang nyata, parameter simulasi ditentukan secara ketat berdasarkan literatur terdahulu. Populasi awal (pada $t = 0$) ditetapkan sebesar 1.000.000 sel/mL, mengacu pada orde besaran inokulum awal kultur bakteri asam laktat yang umum digunakan pada percobaan pertumbuhan mikroba (Kondybayev et al., 2022). Selain itu, data disusun berdasarkan parameter laju pertumbuhan spesifik dalam rentang nilai yang telah dilaporkan pada literatur ilmiah mengenai *L. casei* pada media susu (Sun et al., 2022).

Agar data simulasi merepresentasikan realitas observasi laboratorium, profil pertumbuhan teoretis tersebut ditambahkan dengan variasi acak (*random noise*) berdistribusi normal, $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Penambahan *noise* ini mensimulasikan fluktuasi pengukuran yang lazim terjadi akibat margin galat (*error margin*) alat ukur seperti spektrofotometer atau metode hitung cawan. Melalui kerangka ini, data simulasi yang dihasilkan memiliki dasar biologis yang kuat sekaligus valid secara statistik. Data lengkap beserta nilai transformasi $\ln L$ disajikan pada Tabel 1 di bagian Hasil dan Pembahasan. Sebagai catatan metodologis, pendekatan berbasis simulasi ini dapat dikembangkan lebih lanjut dengan data hasil pengukuran langsung, seperti metode *Total Plate Count* (TPC) pada media MRS agar atau pengukuran densitas optik (OD_{600}) yang dikonversi ke nilai CFU/mL melalui kurva kalibrasi (Susanto et al., 2026).

2.3 Prosedur Konstruksi Model Eksponensial

Pemodelan dibangun berdasarkan asumsi bahwa laju perubahan jumlah sel bakteri terhadap waktu sebanding dengan jumlah sel pada saat tersebut, dinyatakan dalam persamaan diferensial orde satu:

$$\frac{dL}{dt} = rL \quad (1)$$

Persamaan tersebut diselesaikan menggunakan metode pemisahan variabel. Kedua ruas dipisahkan sehingga variabel L berada di satu ruas dan variabel t di ruas lainnya:

Selanjutnya, kedua ruas diintegrasikan:

$$\int \left(\frac{1}{L}\right) dL = \int r dt \quad (2)$$

Dengan mengambil eksponensial pada kedua ruas, diperoleh:

$$L = e^{(rt+C)} = e^C \cdot e^{rt} \quad (3)$$

Berdasarkan syarat awal, pada saat $t = 0$, jumlah bakteri adalah L_0 , sehingga $e^C = L_0$. Dengan demikian, diperoleh bentuk umum model pertumbuhan eksponensial bakteri:

$$L(t) = L_0 \cdot e^{rt} \quad (4)$$

Keterangan:

- L : jumlah populasi bakteri *Lactobacillus casei* pada waktu t (CFU/mL atau sel/mL).
- L_0 : jumlah populasi bakteri *Lactobacillus casei* pada waktu awal ($t = 0$).
- e : bilangan eksponensial (bilangan Euler) yang nilainya sekitar 2,71828.
- r : laju pertumbuhan intrinsik bakteri (per satuan waktu, misalnya per jam).
- t : waktu pengamatan (jam).
- $L(t)$: menunjukkan jumlah bakteri setelah berlangsung selama waktu t .

Parameter L_0 dan r selanjutnya diestimasi dari data simulasi melalui regresi linier terhadap bentuk $\ln L(t) = \ln L_0 + rt$. Tahapan estimasi parameter, perhitungan koefisien determinasi (R^2), dan proyeksi dijelaskan secara rinci langkah demi langkah pada bagian Hasil dan Pembahasan, mengikuti sembilan tahapan kerja yang sistematis agar proses penurunan setiap angka dapat ditelusuri oleh pembaca. Hal ini dilakukan mengikuti tahapan perhitungan algoritmik yang sistematis agar proses konversi parameter teoretis menjadi nilai kuantitatif dapat ditelusuri ulang (*reproducible*) oleh pembaca. Seluruh proses perhitungan analitik dilakukan dengan berbantuan kalkulator saintifik.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Konstruksi dan Estimasi Parameter Model Eksponensial

Data simulasi populasi bakteri *L. casei* selama periode awal fermentasi ($t = 0$ hingga $t = 6$ jam) menunjukkan tren peningkatan non-linier yang merupakan karakteristik khas dari fase logaritmik awal mikroorganisme (Tabel 1).

Tabel 1. Jumlah Populasi Bakteri *Lactobacillus casei* selama Fermentasi ($t = 0 - 6$ Jam)

No	Waktu (t)	Jumlah Bakteri $N(t)$	$\ln N$
1	0	1.000.000	13,8155
2	1	1.398.000	14,1504
3	2	2.055.000	14,5357
4	3	2.810.000	14,8487
5	4	4.120.000	15,2308
6	5	5.690.000	15,5542
7	6	8.250.000	15,9257

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial $dL/dt = rL$, model diubah ke dalam bentuk linier melalui transformasi logaritma natural, menghasilkan persamaan:

$$\ln(L) = \ln(L_0) + kt \quad (5)$$

Berdasarkan analisis regresi linier sederhana terhadap nilai waktu (t) dan logaritma natural populasi $\ln(L)$, diperoleh persamaan garis lurus dengan nilai intersep ($\ln L_0$) sebesar 13,8124 dan kemiringan ($slope, k$) sebesar 0,3512. Dengan mengambil invers logaritma natural (eksponensial) dari nilai intersep, diperoleh estimasi populasi awal (L_0) sebesar 996.879 sel/mL. Nilai ini sangat mendekati parameter kondisi simulasi awal yang ditetapkan sebesar 1.000.000 sel/mL. Selisih kecil ini mengindikasikan bahwa model regresi secara optimal berhasil meminimalkan galat dari keseluruhan titik data. Berdasarkan estimasi parameter empiris tersebut, model akhir pertumbuhan eksponensial *L. casei* pada penelitian ini diformulasikan sebagai:

$$L(t) = 996.879 e^{0,3512t} \quad (6)$$

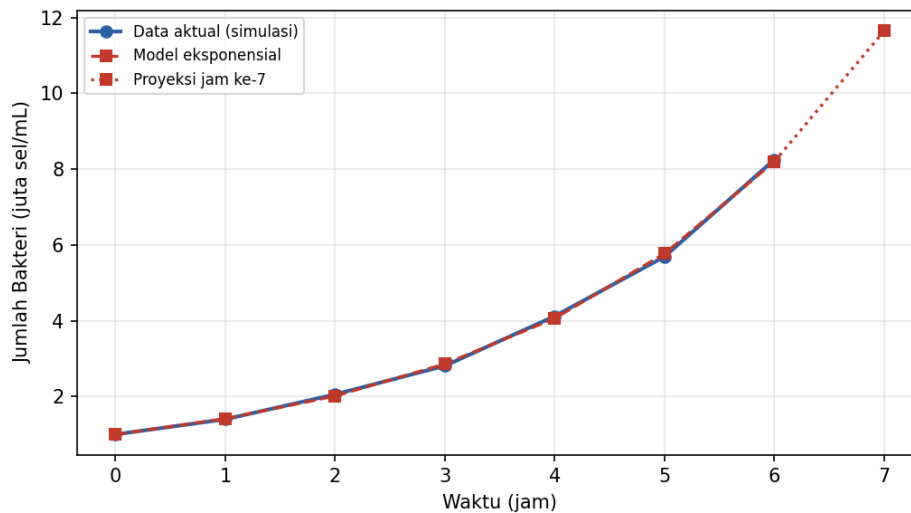
Nilai konstanta $k = 0,3512 \text{ jam}^{-1}$ merepresentasikan laju pertumbuhan spesifik intrinsik bakteri pada fase logaritmik.

3.2 Validasi dan Kinerja Model

Evaluasi kinerja model matematika prediktif tidak cukup hanya mengandalkan koefisien determinasi (R^2). Oleh karena itu, penelitian ini menggunakan dua metrik validasi: R^2 untuk rasio varians yang dapat dijelaskan oleh model, dan *Root Mean Square Error* (RMSE) untuk mengukur galat absolut prediksi terhadap data.

Berdasarkan perhitungan, model menghasilkan nilai koefisien determinasi $R^2 = 0,9996$, yang bermakna 99,96% variasi pertumbuhan populasi bakteri dapat direpresentasikan secara akurat oleh variabel waktu dalam model orde satu ini. Selanjutnya, analisis jumlah kuadrat residu ($SS_{res} = 17.076.513.240$) dengan jumlah data $n = 7$ menghasilkan nilai RMSE sebesar 49.391 sel/mL. Mengingat orde besaran populasi bakteri mencapai jutaan sel (hingga $8,25 \times 10^6$), nilai RMSE ini tergolong sangat kecil dengan galat relatif di bawah 1,5%.

Tingkat presisi yang tinggi ini ditunjukkan secara visual pada Gambar 1, di mana lintasan kurva model eksponensial (garis putus-putus) mengikuti sebaran data simulasi (titik biru) dengan simpangan yang sangat minim.



Gambar 1. Kurva Pertumbuhan dan Proyeksi Populasi *L. casei*

Berdasarkan keandalan statistik tersebut, model ini secara ilmiah valid digunakan untuk melakukan proyeksi populasi *jangka pendek* di luar periode data pembentuknya. Sebagai contoh, ekstrapolasi model pada jam ke-7 memproyeksikan populasi sebesar:

$$L(7) = 996.879 \cdot e^{0,3512(7)} \approx 11.649.482 \text{ sel/mL} \quad (6)$$

3.3 Pembahasan Dinamika Pertumbuhan dan Komparasi Literatur

Penemuan nilai laju pertumbuhan spesifik $k = 0,3512 \text{ jam}^{-1}$ memberikan informasi krusial mengenai kinetika biologis *L. casei*. Secara matematis, nilai ini menghasilkan waktu penggandaan sel (*doubling time*, $t_d = \ln(2)/k$) sebesar 1,97 jam. Artinya, populasi bakteri berlipat ganda setiap kurang dari dua jam selama fase eksponensial. Selain itu, estimasi populasi awal hasil regresi ($L_0 \approx 10^6 \text{ sel/mL}$) sangat sejalan dengan standar inokulum dasar pada industri fermentasi. Secara ekologis, konsentrasi inokulum awal pada rentang ini krusial untuk memastikan dominasi *Lactobacillus* dan menekan laju pertumbuhan mikroba patogen pada awal masa inkubasi.

Kinetika pertumbuhan ini memperlihatkan posisi komparatif yang signifikan terhadap dinamika nutrisi pada literatur terdahulu. Kondybayev *et al.* (2022) melaporkan *L. casei* pada medium sintesis kaya nutrisi (MRS broth) memiliki laju sangat tinggi, yaitu $0,66 \text{ jam}^{-1}$ ($t_d \approx 1,05 \text{ jam}$). Sebaliknya, Fawzi *et al.* (2022) mencatat laju yang jauh lebih lambat pada medium susu murni alami, yakni $0,181 \text{ jam}^{-1}$ ($t_d \approx 3,83 \text{ jam}$). Nilai parameter model dalam penelitian ini ($0,3512 \text{ jam}^{-1}$) berada di antara kedua nilai ekstrem tersebut. Hal ini mengonfirmasi temuan Sun *et al.* (2022) yang menyatakan bahwa kompleksitas matriks pada medium susu memengaruhi kinetika seluler bakteri. Laju $0,3512 \text{ jam}^{-1}$ merepresentasikan kondisi intermediat, membuktikan bahwa konstanta parameter k pada turunan PDB sangat adaptif dalam merekam kondisi fisiologis media fermentasi.

Lebih lanjut, akurasi tinggi ($R^2 = 0,9996$) dari model eksponensial orde satu ini memberikan perspektif penting dalam mikrobiologi prediktif. Sebagian besar peneliti modern cenderung langsung menggunakan model empiris non-linier kompleks—seperti model Gompertz yang dimodifikasi atau model Baranyi-Roberts—untuk memetakan seluruh siklus hidup mikroba. Namun, temuan ini membuktikan bahwa pada jendela waktu spesifik (fase logaritmik awal), penggunaan PDB orde satu linier tidak hanya memadai tetapi jauh lebih efisien. Pendekatan ini mereduksi beban komputasi dari parameter asimtotik tanpa mengorbankan ketajaman prediktif, menjadikannya alat matematis yang taktis untuk pengendalian kualitas jangka pendek di rantai produksi.

3.4 Implikasi dan Keterbatasan pada Skala Industri

Keunggulan model matematika adalah kemampuannya diekstrapolasi guna menetapkan target produksi teknis. Sebagai ilustrasi hipotetis skala industri, diasumsikan PT SF memiliki target harian total produksi sel sebesar $2,34 \times 10^{15}$ sel.

Dengan mensubstitusikan nilai target tersebut ke dalam model matematika tervalidasi, estimasi durasi fermentasi (t) dapat diproyeksikan:

$$2,34 \times 10^{15} = 996.879e^{0,3512t} \quad (6)$$

Dengan mengambil logaritma natural pada kedua ruas, diperoleh:

$$\ln(2,34 \times 10^{15}) = \ln(996.879) + 0,3512t$$

$$35,389 = 13,812 + 0,3512t$$

$$t \approx 61,43 \text{ jam}$$

Meskipun secara analitik memungkinkan, penerapan ekstrapolasi waktu sejauh 61,43 jam pada kondisi industri riil harus dievaluasi batasan ilmiahnya. Pada realitas bioteknologi, proyeksi jangka panjang (*long-term forecast*) menggunakan model eksponensial tunggal tidak akan valid. Dalam kondisi *in vivo* di bioreaktor, sel *L. casei* tidak dapat mempertahankan laju eksponensial secara terus-menerus.

Pertumbuhan sel secara alami akan mengalami perlambatan dan memasuki fase stasioner yang diinduksi oleh beberapa faktor penghambat, seperti penipisan sumber karbon (laktosa), penurunan drastis pH lingkungan, serta toksisitas dari akumulasi metabolit asam laktat. Oleh karena itu, temuan ini menyimpulkan bahwa model eksponensial orde satu adalah instrumen yang sangat tangguh untuk memproyeksikan target durasi pendek pada awal fase fermentasi industri. Namun, pemodelan untuk siklus penuh industri menuntut integrasi dengan persamaan diferensial yang memperhitungkan faktor daya tampung lingkungan (*carrying capacity*), seperti model pertumbuhan Logistik.

4. KESIMPULAN

Penelitian ini berhasil mengkonstruksi dan memvalidasi model pertumbuhan eksponensial populasi *Lactobacillus casei* pada fase logaritmik awal, yang diturunkan dari persamaan diferensial biasa orde satu $\frac{dL}{dt} = rL$. Melalui penyelesaian analitik metode pemisahan variabel dan estimasi parameter empiris, diperoleh model spesifik $L(t) = 996.879 e^{0,3512t}$. Model ini menunjukkan kinerja prediktif dan tingkat kesesuaian yang sangat tinggi terhadap data observasi awal ($R^2 = 0,9996$ dan metrik galat yang minim). Keandalan ini dibuktikan melalui keberhasilan model dalam memproyeksikan populasi bakteri jangka pendek, yakni mencapai 11.649.482 sel/mL pada jam ke-7 fermentasi, yang mendemonstrasikan potensi matematisnya untuk mengestimasi capaian target durasi produksi fase awal di industri.

Meskipun demikian, keterbatasan mendasar dari penelitian ini adalah ketergantungannya pada kerangka data simulasi numerik. Pendekatan ini secara teoretis berhasil membuktikan struktur matematis model, namun belum merepresentasikan tekanan lingkungan biologis secara utuh pada kondisi industri nyata—seperti penipisan nutrisi dan efek toksik asam laktat yang akan memaksa bakteri memasuki fase stasioner. Oleh karena itu, validasi empiris menggunakan data primer eksperimental, seperti pengukuran *Total Plate Count* (TPC) atau densitas optik (OD_{600}) secara *in vivo*, sangat esensial dan mendesak untuk dilakukan pada penelitian selanjutnya. Pengembangan pemodelan ke arah model berbasis daya tampung (*carrying capacity*) seperti model Logistik juga mutlak diperlukan agar instrumen prediktif ini dapat digunakan sebagai landasan pengambilan keputusan pada keseluruhan siklus fermentasi di industri.

DAFTAR PUSTAKA

- Fawzi, N. Y., Abdelghani, D. Y., Abdel-azim, M. A., Shokier, C. G., Youssef, M. W., Gad El-Rab, M. K., Gad, A. I., & Abou-Taleb, K. A. (2022). The ability of probiotic lactic acid bacteria to ferment Egyptian broken rice milk and produce rice-based yoghurt. *Annals of Agricultural Sciences*, 67(1), 107–118. <https://doi.org/10.1016/j.aoas.2022.06.004>
- Kondybayev, A., Konuspayeva, G., Strub, C., Loiseau, G., Mestres, C., Grabulos, J., Manzano, M., Akhmetsadykova, S., & Achir, N. (2022). Growth and Metabolism of Lacticaseibacillus casei and Lactobacillus kefir isolated from Qymyz, a Traditional Fermented Central Asian Beverage. *Fermentation*, 8(8). <https://doi.org/10.3390/fermentation8080367>
- Purnomo, D., Apridamayanti, P., & Sari, R. (2021). Potensi antibakteri dari susu fermentasi dengan starter Lactobacillus casei terhadap Escherichia coli dan Staphylococcus aureus. *Jurnal Cerebellum*, 6(2), 31. <https://doi.org/10.26418/jc.v6i2.45301>
- Rahman, D. H., Tanziha, I., & Usmiati, S. (2012). FORMULASI PRODUK SUSU FERMENTASI KERING DENGAN PENAMBAHAN BAKTERI PROBIOTIK Lactobacillus casei DAN Bifidobacterium longum. *Jurnal Gizi Dan Pangan*, 7(1), 50. <https://doi.org/10.25182/jgp.2012.7.1.50->
- Sun, Y., Peng, C., Wang, J., Guo, S., Sun, Z. H., & Zhang, H. (2022). Mesopic fermentation contributes more to the formation of important flavor compounds and increased growth of Lactobacillus casei Zhang than does high temperature during milk fermentation and storage. *Journal of Dairy Science*, 105(6), 4857–4867. <https://doi.org/10.3168/jds.2021-20949>
- Susanto, A., Ramadhani, A. R., & Angriani, D. (2026). Optimasi Biaya dan Gizi Bahan Pangan Mentah Program MBG Siswa. 77–85.
- Ubaidilah, A. (2025). Peran Probiotik Dalam Kesehatan Pencernaan Manusia. *Journal of Science and Technology: Alpha*, 1(3), 69–75. <https://doi.org/10.70716/alpha.v1i3.236>
- Yulia, B. M., Abbas Zaini, M., Kisworo, D., Fakultas, A., Pangan, T., Agroindustri, D., Mataram, U., & Fakultas,). (2015). PENGARUH PENAMBAHAN PROBIOTIK (Lactobacillus casei) DAN LAMA PENYIMPANAN TERHADAP SIFAT KIMIA KEJU MOZARELLA DARI SUSU KERBAU SUMBAWA [The Effect of Prebiotic Addition (Lactobacillus casei) and Shift Life Towards the Chemical Characteristic of The Mozarel. *Pro Food (Jurnal Ilmu Dan Teknologi Pangan)*, 1(1), 33–39.