

# Analisis Titik Kesetimbangan Model Epidemi pada Penyakit Campak

Abraham<sup>1\*</sup>, Tiku Tandiangnga<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Jurus Matematika, Universitas Cenderawasih, Indonesia

e-mail: [bramit1112@gmail.com](mailto:bramit1112@gmail.com)

## Abstrak

Penyakit campak merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh virus dan masih menjadi masalah kesehatan masyarakat, meskipun upaya pencegahan melalui imunisasi terus dilakukan. Salah satu pendekatan untuk memahami dinamika penyebaran penyakit campak adalah melalui pemodelan matematika epidemiologi. Penelitian ini mengkaji model epidemi tipe SIR (Susceptible–Infected–Recovered) pada penyakit campak dengan memperhatikan adanya penurunan kekebalan tubuh, sehingga individu yang telah sembuh berpotensi kembali menjadi rentan. Analisis dilakukan dengan menentukan titik ekuilibrium non-endemik dan endemik, menghitung bilangan reproduksi dasar menggunakan metode next generation matrix yang melibatkan radius spektral, serta menganalisis kestabilan titik ekuilibrium melalui matriks Jacobian. Hasil analisis menunjukkan bahwa titik ekuilibrium non-endemik bersifat stabil asimtotik ketika nilai bilangan reproduksi dasar kurang dari satu, dan menjadi tidak stabil ketika nilainya lebih besar dari satu. Simulasi numerik menggunakan perangkat lunak Matlab mendukung hasil analisis teoretis serta menunjukkan bahwa penurunan kekebalan tubuh berpengaruh signifikan terhadap dinamika jumlah individu pada masing-masing subpopulasi. Dengan demikian, model ini dapat memberikan gambaran matematis mengenai pengaruh kekebalan terhadap keberlangsungan penyebaran penyakit campak dalam suatu populasi tertutup.

**Kata Kunci:** Model SIR, Penyakit Campak, Titik Ekuilibrium, Bilangan Reproduksi Dasar, Kestabilan Model.

## 1. PENDAHULUAN

Penyakit campak (*measles*) merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh virus campak dari genus *Morbillivirus* dan famili *Paramyxoviridae*. Penyakit ini umumnya ditandai dengan gejala prodromal berupa demam, batuk, pilek, dan konjungtivitis, yang kemudian diikuti dengan munculnya ruam makulopapular di seluruh tubuh. Campak bersifat sangat menular dan dapat menimbulkan komplikasi serius seperti bronkitis, pneumonia, hingga ensefalitis yang berpotensi menyebabkan kematian (Widoyono, 2008; Setiawan et al., 2008). Oleh karena itu, campak masih menjadi salah satu permasalahan kesehatan masyarakat, khususnya di wilayah dengan cakupan imunisasi yang belum optimal.

Upaya pencegahan penyakit campak telah dilakukan melalui program imunisasi. Menurut World Health Organization (WHO), vaksinasi campak mampu menurunkan angka kematian akibat campak secara signifikan, bahkan mencegah jutaan kematian secara global dalam kurun waktu dua dekade terakhir (WHO, 2019). Meskipun demikian, dalam praktiknya masih ditemukan kasus campak berulang di beberapa wilayah. Hal ini menunjukkan bahwa pengendalian penyakit campak tidak hanya dipengaruhi oleh tingkat vaksinasi, tetapi juga oleh faktor lain seperti penurunan kekebalan tubuh pada individu yang sebelumnya telah sembuh atau divaksinasi.

Salah satu pendekatan yang dapat digunakan untuk memahami dinamika penyebaran penyakit menular adalah melalui pemodelan matematika epidemiologi. Model epidemi tipe SIR (Susceptible–Infected–Recovered) pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick (1927) dan hingga kini banyak digunakan untuk menganalisis penyebaran penyakit infeksi. Model ini membagi populasi ke dalam tiga subpopulasi utama, yaitu individu rentan (*susceptible*), individu terinfeksi (*infected*), dan individu sembuh (*recovered*) (Murray, 2002).

Seiring perkembangan penelitian, model SIR telah mengalami berbagai pengembangan, seperti penambahan faktor vaksinasi, struktur umur, dan perubahan tingkat kekebalan tubuh (Hethcote, 2000; Brauer & Castillo-Chavez, 2000).

Beberapa penelitian terdahulu telah mengkaji model SIR pada berbagai penyakit menular, termasuk penyakit campak. Lestari dan Tasman (2013) mengkaji pengaruh strategi *pulse vaccination* dalam pencegahan penyebaran penyakit campak, sementara Abubakar et al. (2013) menganalisis bifurkasi pada model matematika dinamika penyakit campak. Selain itu, Aulia et al. (2016) mengembangkan model epidemi dengan memperhatikan peluang keberhasilan vaksinasi dan kekebalan tetap. Namun demikian, kajian yang secara khusus memperhatikan kemungkinan individu yang telah sembuh kembali menjadi rentan akibat penurunan kekebalan tubuh masih relatif terbatas, padahal kondisi tersebut berpotensi memengaruhi dinamika penyebaran penyakit dalam jangka panjang.

Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini bertujuan untuk mengkaji model matematika penyebaran penyakit campak tipe SIR dengan memperhatikan penurunan kekebalan tubuh. Analisis dilakukan dengan menentukan titik ekuilibrium non-endemik dan endemik, menghitung bilangan reproduksi dasar menggunakan metode *next generation matrix*, serta menganalisis kestabilan sistem menggunakan matriks Jacobian. Selain itu, dilakukan simulasi numerik untuk menggambarkan dinamika perubahan jumlah individu pada masing-masing subpopulasi. Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan pemahaman yang lebih mendalam mengenai dinamika penyebaran penyakit campak serta menjadi dasar pertimbangan dalam perumusan strategi pengendalian penyakit.

## 2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian teoretis dengan pendekatan analitis dan numerik yang bertujuan untuk mengkaji dinamika penyebaran penyakit campak menggunakan model matematika epidemiologi tipe SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*). Model yang digunakan dimodifikasi dengan memperhatikan adanya penurunan kekebalan tubuh, sehingga individu yang telah sembuh memiliki kemungkinan kembali menjadi rentan terhadap penyakit campak.

### 2.1 Jenis dan Pendekatan Penelitian

Pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendekatan kualitatif–kuantitatif melalui analisis matematika. Analisis kualitatif dilakukan untuk mengkaji sifat-sifat model, seperti keberadaan titik ekuilibrium dan kestabilannya, sedangkan analisis kuantitatif dilakukan melalui simulasi numerik untuk menggambarkan perilaku solusi sistem persamaan diferensial.

### 2.2 Pembentukan Model

Model epidemi yang digunakan adalah model SIR dengan populasi tertutup, sehingga tidak terdapat migrasi masuk maupun keluar dari populasi. Populasi dibagi ke dalam tiga subpopulasi, yaitu individu rentan (*Susceptible*), individu terinfeksi (*Infected*), dan individu sembuh (*Recovered*). Dalam model ini diasumsikan bahwa individu yang telah sembuh dapat kembali ke subpopulasi rentan akibat penurunan kekebalan tubuh. Model dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan diferensial nonlinear orde satu yang merepresentasikan laju perubahan masing-masing subpopulasi terhadap waktu.

Model matematis epidemiologi *SIR* (*Susceptible, Infected, Recovered*) pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan Mc. Kendrick pada tahun 1927. Model tersebut terdiri dari tiga kategori yaitu: *susceptible* (*S*) atau individu yang rentan terserang penyakit, *infected* (*I*) atau individu yang terinfeksi dan dapat menyebarkan penyakit tersebut kepada individu yang rentan dan *recovered* (*R*) atau individu yang diasumsikan telah sembuh atau kekebalan tubuhnya telah kembali normal sehingga kebal terhadap penyakit (Murray, 2002).

Berikut ini merupakan asumsi-asumsi yang dibuat dalam pembentukan model penyebaran penyakit campak tipe *SIR* dengan laju kematian yang beragam tiap subpopulasi.

1. Populasi tertutup (tidak ada migrasi).

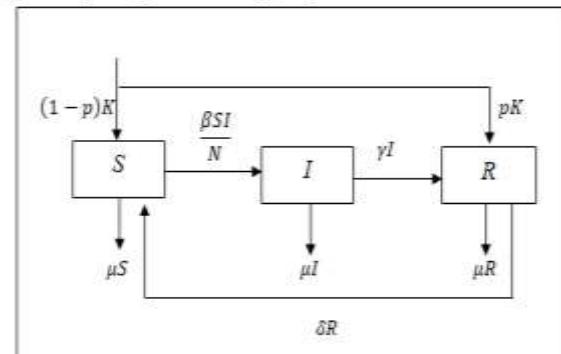
2. Individu yang sukses divaksinasi masuk ke subpopulasi  $R$  dan tidak sukses divaksinasi masuk ke subpopulasi  $S$ .
3. Individu subpopulasi  $S$  yang kontak dengan individu subpopulasi  $I$ , masuk ke subpopulasi  $I$ .
4. Individu yang terinfeksi dan mengalami kekebalan alamiah masuk ke subpopulasi  $R$ .
5. Individu subpopulasi  $R$  yang mengalami penurunan kekebalan terhadap penyakit kembali ke subpopulasi  $S$ .
6. Individu dalam masing-masing subpopulasi mengalami kematian alami sebesar  $\mu$ .
7. Tidak ada individu yang mengalami kematian karena penyakit campak.

Berdasarkan asumsi-asumsi yang diberikan, maka untuk membangun model dinotasikan parameter-parameter yang bernilai positif sebagai berikut:

1.  $K$  menyatakan jumlah kelahiran.
2.  $\mu$  menyatakan laju kematian pada masing-masing subpopulasi.
3.  $p$  menyatakan proporsi populasi yang telah divaksinasi, dengan  $0 < p < 1$ .
4.  $\beta$  menyatakan laju transmisi (laju kontak) individu yang rentan dengan individu yang terinfeksi penyakit campak.
5.  $\gamma$  menyatakan laju kesembuhan individu terinfeksi
6.  $\delta$  menyatakan laju individu dari subpopulasi yang sembuh ke subpopulasi rentan.

Jumlah total populasi dinotasikan dengan  $N$  dan jumlah individu yang lahir tiap periode  $t$  diasumsikan sebesar  $K$ .

Berikut ini merupakan diagram alur model  $SIR$  pada epidemi penyakit campak dengan memperhatikan penurunan kekebalan tubuh.



Gambar 1 Diagram alur model  $SIR$  pada epidemi penyakit campak dengan memperhatikan penurunan kekebalan tubuh

Jadi, model penyebaran penyakit campak tipe  $SIR$  dengan memperhatikan penurunan kekebalan tubuh, mempunyai sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= (1-p)K + \delta R - \frac{\beta SI}{N} - \mu S \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - (\gamma + \mu)I \\ \frac{dR}{dt} &= pK + \gamma I - (\delta + \mu)R \end{aligned} \tag{1}$$

Dengan  $S(0) > 0, I(0) \geq 0, R(0) \geq 0$ , dan  $S + I + R = N$ ,

Adapun diketahui, bahwa  $\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = \frac{dN}{dt}$ , maka

$$\begin{aligned} K - (\mu S + \mu I + \mu R) &= 0 \\ \Leftrightarrow K - \mu N &= 0 \\ \Leftrightarrow K &= \mu N \end{aligned}$$

### 2.3 Analisis Titik Ekuilibrium

Analisis diawali dengan menentukan titik ekuilibrium sistem, yaitu titik ekuilibrium non-endemik (bebas penyakit) dan titik ekuilibrium endemik (penyakit tetap bertahan dalam populasi). Titik-titik ekuilibrium diperoleh dengan membuat laju perubahan setiap subpopulasi sama dengan nol, sehingga diperoleh sistem persamaan aljabar yang kemudian diselesaikan secara analitis.

### 2.4 Penentuan Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar ditentukan menggunakan metode *next generation matrix* yang melibatkan radius spektral. Nilai ini digunakan untuk menggambarkan kemampuan suatu penyakit dalam menyebar di dalam populasi. Bilangan reproduksi dasar menjadi parameter kunci dalam menentukan apakah penyakit akan punah atau bertahan dalam jangka panjang.

### 2.5 Analisis Kestabilan

Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui sifat kestabilan titik ekuilibrium. Metode yang digunakan adalah analisis nilai eigen dari matriks Jacobian yang dibentuk dari sistem persamaan diferensial. Titik ekuilibrium dikatakan stabil asimtotik apabila seluruh nilai eigen memiliki bagian real negatif, dan dikatakan tidak stabil apabila terdapat nilai eigen dengan bagian real positif.

### 2.6 Simulasi Numerik

Simulasi numerik dilakukan untuk mendukung hasil analisis teoretis serta menggambarkan dinamika perubahan jumlah individu pada masing-masing subpopulasi terhadap waktu. Simulasi dilakukan menggunakan perangkat lunak Matlab dengan beberapa skenario nilai parameter, khususnya untuk melihat pengaruh laju transmisi, laju kesembuhan, dan penurunan kekebalan tubuh terhadap dinamika penyebaran penyakit campak.

### 2.7 Tahapan Penelitian

Secara umum, tahapan penelitian ini meliputi:

1. Studi literatur terkait penyakit campak dan model epidemi SIR.
2. Pembentukan dan perumusan model matematika.
3. Penentuan titik ekuilibrium sistem.
4. Perhitungan bilangan reproduksi dasar.
5. Analisis kestabilan titik ekuilibrium.
6. Simulasi numerik dan interpretasi hasil.
7. Penarikan kesimpulan berdasarkan hasil analisis dan simulasi.

## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

### 3.1 Penentuan Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium non endemik diperoleh dengan membuat laju perubahan masing-masing subpopulasi konstan terhadap waktu ( $t$ ) yaitu kondisi dimana  $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$ , sehingga Sistem (1) menjadi

$$(1-p)K + \delta R - \frac{\beta SI}{N} - \mu S = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\beta SI}{N} - (\gamma + \mu)I = 0 \quad (3)$$

$$pK + \gamma I - (\delta + \mu)R = 0 \quad (4)$$

Berdasarkan persamaan (3), diperoleh

$$I \left( \frac{\beta S}{N} - (\gamma + \mu) \right) = 0$$

$$I = 0$$

Sehingga diperoleh kompartemen  $S$  untuk titik ekuilibrium endemik yaitu

$$S^{**} = \frac{N(\gamma+\mu)}{\beta} \quad (5)$$

Keadaan saat  $I = 0$  merupakan syarat perlu untuk memperoleh titik ekuilibrium non endemik, sehingga dari Persamaan (2) diperoleh bentuk

$$S = \frac{((1-p)K + \delta R^*)}{\mu} \quad (6)$$

Kemudian dari Persamaan (4), diperoleh

$$R^* = \frac{pK}{(\delta+\mu)} \quad (7)$$

Lalu substitusikan Persamaan (7) ke Persamaan (6) diperoleh

$$S^* = \frac{K(\delta+\mu-\mu p)}{\mu(\delta+\mu)} \quad (8)$$

Jadi, titik ekuilibrium non endemik adalah

$$E_0 = (S^*, I^*, R^*) = \left( \frac{K(\delta+\mu-\mu p)}{\mu(\delta+\mu)}, 0, \frac{pK}{(\delta+\mu)} \right)$$

Selanjutnya, menentukan titik ekuilibrium endemik. Titik ekuilibrium endemik adalah titik dimana penyakit pasti akan menyebar pada suatu daerah tertutup dengan  $I > 0$  untuk  $t \rightarrow \infty$ . Keadaan saat  $I > 0$  atau  $\frac{\beta S}{N} - (\gamma + \mu) = 0$  merupakan syarat perlu untuk memperoleh titik ekuilibrium endemik.

Substitusi Persamaan (5) ke Persamaan (2) diperoleh:

$$I = \frac{\beta[(1-p)K + \delta R] - \mu N(\gamma + \mu)}{\beta(\gamma + \mu)} \quad (9)$$

Dari persamaan (3.4) diperoleh

$$R = \frac{(pK + \gamma I)}{(\delta + \mu)} \quad (10)$$

Kemudian substitusikan Persamaan (10) ke Persamaan (9) diperoleh bentuk

$$I^{**} = \frac{\beta K(\delta + \mu - \mu p) - \mu N(\gamma \delta - \mu \gamma - \mu \delta - \mu^2)}{\beta \mu (\mu + \delta + \gamma)} \quad (11)$$

Substitusi Persamaan (3.11) ke Persamaan (10), diperoleh

$$R^{**} = \frac{\beta K(\mu p + \gamma) - N \gamma \mu (\gamma + \mu)}{\beta \mu (\mu + \delta + \gamma)}$$

Jadi, titik ekuilibrium endemik adalah

$$E_1 = (S^{**}, I^{**}, R^{**})$$

Dengan

$$S^{**} = \frac{N(\gamma+\mu)}{\beta}$$

$$I^{**} = \frac{\beta K(\delta + \mu - \mu p) - \mu N(\gamma \delta - \mu \gamma - \mu \delta - \mu^2)}{\beta \mu (\mu + \delta + \gamma)}$$

$$R^{**} = \frac{\beta K(\mu p + \gamma) - N \gamma \mu (\gamma + \mu)}{\beta \mu (\mu + \delta + \gamma)}$$

### 3.2 Bilangan Reproduksi Dasar

Berikut ini penentuan bilangan reproduksi dasar  $R_0$  dengan menggunakan *next generation matrix* yang melibatkan radius spectral.

Dari Sistem (1) diperoleh:

Misalkan  $X = (S, R)$ ,  $Z = (I)$  atau didefinisikan sebagai

$$f(X, Z) = \begin{bmatrix} (1-p)K + \delta R - \frac{\beta SI}{N} - \mu S \\ pK + \gamma I - (\delta + \mu)R \end{bmatrix}$$

$$h(X, Z) = \frac{\beta SI}{N} - (\gamma + \mu)I$$

Dari titik ekuilibrium non endemik Sistem (1) diperoleh

$$E_0 = (S^*, I^*, R^*) = \left( \frac{K(\delta + \mu - \mu p)}{\mu(\delta + \mu)}, 0, \frac{pK}{(\delta + \mu)} \right)$$

$$N = S^* + I^* + R^* = \frac{K}{\mu} \quad \text{dan} \quad X^* = (S^*, R^*).$$

Turunan dari  $h(X^*, Z)$  terhadap  $Z$  adalah

$$D_Z h(X^*, Z)|_{Z=0} = \frac{\beta S^*}{N} - (\gamma + \mu)$$

Sehingga diperoleh

$$A = D_Z h(X^*, Z)|_{Z=0} = \beta \left( \frac{\delta + \mu - \mu p}{(\delta + \mu)} \right) - (\gamma + \mu)$$

Karena  $A = M - D$  maka misalkan  $M = \beta \left( \frac{\delta + \mu - \mu p}{(\delta + \mu)} \right)$  dan  $D = (\gamma + \mu)$ , sehingga diperoleh

$$R_0 = MD^{-1} = \frac{\beta(\delta + \mu - \mu p)}{(\delta + \mu)(\gamma + \mu)}$$

### 3.3 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Analisis kestabilan titik ekuilibrium diperoleh berdasarkan matriks Jacobian, untuk itu perlu dibentuk matriks Jacobian dari Sistem Persamaan (1). Diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut,

$$J(S, I, R) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta I}{N} - \mu & -\frac{\beta S}{N} & \delta \\ \frac{\beta I}{N} & \frac{\beta S}{N} - (\gamma + \mu) & 0 \\ 0 & \gamma & -(\delta + \mu) \end{bmatrix} \quad (12)$$

*Teorema 3.1:*

Titik kesetimbangan non-endemik  $E_0$  bersifat stabil asimtotik jika  $R_0 < 1$  dan tidak stabil jika  $R_0 > 1$ .

Bukti:

Untuk menganalisis kestabilan titik ekuilibrium non-endemik dapat dilakukan dengan cara melihat nilai eigen pada matriks  $J_{E_0}$ . Untuk mendapatkan matriks  $J_{E_0}$  yaitu dengan mensubstitusi  $E_0 = (S^*, I^*, R^*)$ , ke Persamaan (3.12) sehingga diperoleh,

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\beta S^*}{N} & \delta \\ 0 & \frac{\beta S^*}{N} - A & 0 \\ 0 & \gamma & -B \end{bmatrix}$$

dengan  $A = (\gamma + \mu)$  dan  $B = (\delta + \mu)$

Sehingga diperoleh nilai eigen

$$(\lambda + \mu) = 0$$

$$\lambda_1 = -\mu < 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen  $\lambda_1$  bernilai negatif. Dari Persamaan (15), diperoleh

$$\left[ \left( \lambda - \frac{\beta S^*}{N} + A \right) (\lambda + B) \right] = 0$$

$$\lambda_2 = \frac{\beta S^*}{N} - A \quad \text{atau} \quad \lambda_3 = -B < 0$$

Jika disubstitusikan  $S^*$  ke  $\lambda_2$  maka diperoleh,

$$\lambda_2 = \frac{\beta \left( \frac{K(\delta + \mu - \mu p)}{\mu(\delta + \mu)} \right)}{N} - (\gamma + \mu)$$

maka  $\lambda_2 < 0$ , dengan syarat  $(\gamma + \mu) > \frac{\beta K(\delta + \mu - \mu p)}{N \mu (\delta + \mu)}$ .

Berikut ini merupakan pembuktian  $\lambda_2 < 0$  ekuivalen dengan  $R_0 < 1$ , diketahui bahwa  $\frac{K}{\mu N}$ , sehingga diperoleh:

$$\lambda_2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta K(\delta + \mu - \mu p)(\gamma + \mu)}{N \mu (\delta + \mu)(\gamma + \mu)} - (\gamma + \mu) < 0$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \frac{R_0 K(\gamma + \mu)}{N\mu} - (\gamma + \mu) < 0 \\
 &\Leftrightarrow (\gamma + \mu)(R_0 - 1) < 0 \\
 &\Leftrightarrow R_0 < 1
 \end{aligned}$$

Karena syarat telah terpenuhi yaitu  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ ,  $\lambda_3 < 0$  sehingga ekuivalen dengan  $R_0 < 1$  maka  $E_0(S^*, I^*, R^*)$  stabil asimtotik. Jika  $R_0 > 1$  maka  $E_0(S^*, I^*, R^*)$  tidak stabil asimtotik.

### 3.4 Simulasi Numerik

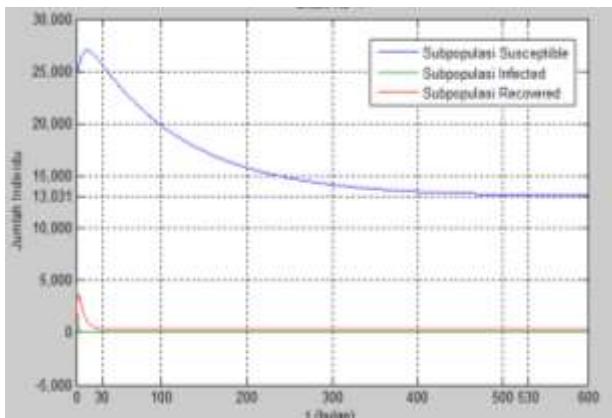
Berikut ini adalah parameter-parameter yang digunakan untuk membuat simulasi numerik analisis kestabilan titik ekuilibrium endemik model *SIR* pada Sistem (1).

Tabel 1 Nilai parameter untuk simulasi numerik saat  $R_0 < 1$

Parameter	Nilai Parameter
$\beta$	0,1
$\delta$	0,15
$\mu$	0,009
$\gamma$	0,8
$N$	30000
$K$	120
$p$	0,4
$(1 - p)$	0,6

Nilai-nilai parameter yang digunakan pada simulasi disajikan pada Tabel dengan nilai awal masing-masing populasi adalah  $S(0) = 25000$ ,  $I(0) = 4500$ , dan  $R(0) = 500$ .

Berdasarkan nilai-nilai parameter pada Tabel (3.1) diperoleh  $R_0 = 0,12$ , sehingga  $R_0 < 1$ .



Gambar 2 Grafik perubahan jumlah individu subpopulasi *SIR* terhadap waktu saat  $R_0 < 1$

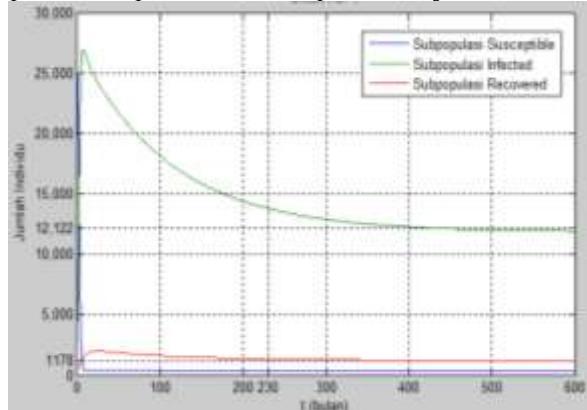
Berdasarkan Gambar 2 menunjukkan bahwa jumlah individu pada subpopulasi rentan nilainya akan selalu dekat dan stabil dengan  $S^* = 13031$  pada waktu  $t = 530$  bulan sampai  $t = 600$  bulan. Jumlah individu pada subpopulasi terinfeksi akan selalu dekat dan stabil menuju nol dengan  $I^* = 0$  dari waktu  $t = 5$  bulan sampai waktu  $t = 600$  bulan. Jumlah individu pada subpopulasi sembuh akan selalu dekat dan stabil dengan  $R^* = 302$  dari waktu  $t = 30$  bulan sampai waktu  $t = 600$  bulan. Hal ini menunjukkan bahwa jumlah individu pada subpopulasi rentan, subpopulasi terinfeksi, dan subpopulasi sembuh semakin lama akan menuju titik  $E_0$  dengan kata lain saat  $R_0 = 0,12 < 1$  maka semakin lama penyakit campak akan hilang dari populasi.

Berikut ini adalah parameter-parameter yang digunakan untuk membuat simulasi numerik analisis kestabilan titik ekuilibrium endemik model *SIR* pada Sistem (3.1)

Tabel 2 Nilai parameter untuk simulasi numerik saat  $R_0 > 1$

Parameter	Nilai Parameter
$\beta$	0,9
$\delta$	0,15
$\mu$	0,009
$\gamma$	0,01
$N$	30000
$K$	120
$p$	0,6
$(1 - p)$	0,4

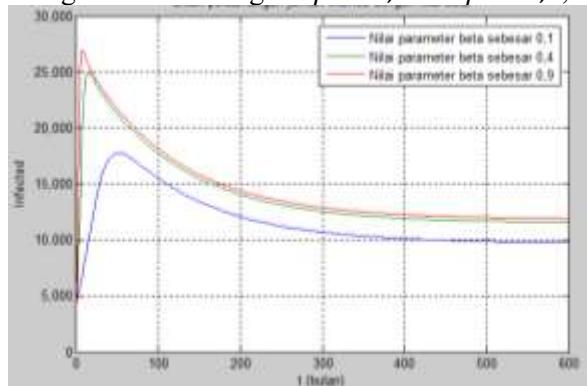
Berdasarkan nilai-nilai parameter pada Tabel 2 diperoleh  $R_0 = 45,76$ , sehingga  $R_0 > 1$ .



Gambar 3 Simulasi perubahan jumlah individu subpopulasi SIR terhadap waktu saat  $R_0 > 1$

Berdasarkan Gambar 3 menunjukkan bahwa jumlah individu pada subpopulasi rentan nilainya akan selalu dekat dan stabil dengan  $S^{**} = 633$  pada waktu  $t = 10$  bulan sampai  $t = 600$  bulan. Jumlah individu pada subpopulasi terinfeksi akan selalu dekat dan stabil dengan  $I^{**} = 12122$  pada waktu  $t = 400$  bulan sampai  $t = 600$ . Jumlah individu pada subpopulasi sembuh akan selalu dekat dan stabil dengan  $R^{**} = 1178$  dari waktu  $t = 230$  bulan sampai waktu  $t = 600$  bulan. Hal ini menunjukkan bahwa jumlah individu pada subpopulasi rentan, subpopulasi terinfeksi, dan subpopulasi sembuh semakin lama akan menuju titik  $E_1$  dengan kata lain saat  $R_0 = 45,76 > 1$  maka semakin lama penyakit campak akan tetap ada dalam populasi (masih terjadi penyebaran penyakit) dalam waktu yang cukup lama.

Selanjutnya dilakukan simulasi untuk melihat pengaruh laju transmisi (laju kontak) individu yang rentan dengan individu yang terinfeksi dengan membandingkan  $\beta = 0,1$  dan  $\beta = 0,4$ , serta  $\beta = 0,9$ .



Gambar 4 Perbandingan jumlah individu pada subpopulasi terinfeksi dengan nilai parameter  $\beta = 0,1$ ;  $\beta = 0,4$ ; dan  $\beta = 0,9$

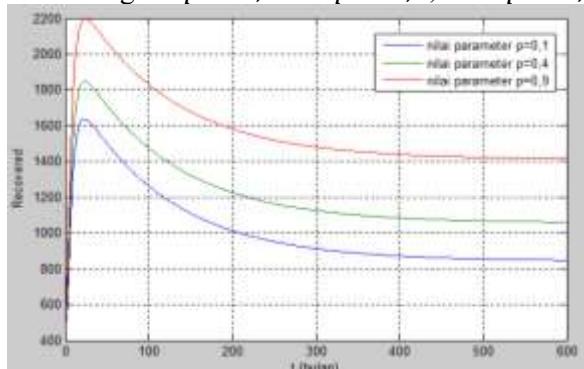
Pada Gambar 4 menunjukkan bahwa semakin tinggi nilai parameter  $\beta$  maka jumlah individu pada subpopulasi terinfeksi semakin meningkat. Hal ini disebabkan karena individu dari subpopulasi rentan masuk ke subpopulasi terinfeksi sebesar  $\beta$ , sehingga jika nilai parameter  $\beta$  semakin kecil maka jumlah individu dari subpopulasi terinfeksi semakin menurun begitu juga sebaliknya.

Selanjutnya dilakukan simulasi untuk melihat pengaruh laju kesembuhan individu terinfeksi terhadap subpopulasi sembuh, dengan membandingkan  $\gamma = 0,05$  dan  $\gamma = 0,1$ , serta  $\gamma = 0,2$ .

Gambar 5 Perbandingan jumlah individu pada subpopulasi terinfeksi dengan nilai parameter  $\gamma = 0,05$ ;  $\gamma = 0,1$ ; dan  $\gamma = 0,2$

Pada Gambar 5 menunjukkan bahwa semakin tinggi nilai parameter  $\gamma$  maka jumlah individu pada subpopulasi sembuh semakin meningkat. Hal ini disebabkan karena individu dari subpopulasi terinfeksi masuk ke subpopulasi sembuh sebesar  $\gamma$ , sehingga jika nilai parameter  $\gamma$  semakin kecil maka jumlah individu dari subpopulasi sembuh semakin menurun begitu juga sebaliknya.

Selanjutnya dilakukan simulasi untuk melihat pengaruh laju individu dari subpopulasi yang sembuh ke subpopulasi sembuh, dengan membandingkan  $p = 0,1$  dan  $p = 0,4$ ; serta  $p = 0,9$ .



Gambar 6 Perbandingan jumlah individu pada subpopulasi sembuh dengan nilai parameter  $p = 0,1$ ;  $p = 0,4$ ; dan  $p = 0,9$ .

Pada Gambar 3.6 menunjukkan bahwa semakin tinggi nilai parameter  $p$  maka jumlah individu dari subpopulasi sembuh juga meningkat. Hal ini disebabkan karena nilai parameter  $p$  yang masuk ke subpopulasi sembuh. Dimana  $p$  merupakan individu yang sudah divaksin dan kebal.

#### 4. KESIMPULAN DAN SARAN

Model penyebaran penyakit campak tipe *SIR* dengan memperhatikan penurunan kekebalan tubuh adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= (1 - p)K + \delta R - \frac{\beta SI}{N} - \mu S \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - (\gamma + \mu)I \\ \frac{dR}{dt} &= pK + \gamma I - (\delta + \mu)R\end{aligned}$$

dengan  $S(0) > 0, I(0) \geq 0, R(0) \geq 0$ , dan  $S + I + R = N$ , untuk  $t = 0$

Model penyebaran penyakit campak tipe *SIR* dengan memperhatikan penurunan kekebalan tubuh mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium non endemik dan titik ekuilibrium endemik. Titik ekuilibrium non endemik, yaitu

$$E_0 = (S^*, I^*, R^*) = \left( \frac{K(\delta+\mu-\mu p)}{\mu(\delta+\mu)}, 0, \frac{pK}{(\delta+\mu)} \right)$$

dan titik ekuilibrium endemik, yaitu  $E_1 = (S^{**}, I^{**}, R^{**})$   
dengan

$$S^{**} = \frac{N(\gamma+\mu)}{\beta}$$

$$I^{**} = \frac{\beta K(\delta+\mu-\mu p)-\mu N(\gamma\delta-\mu\gamma-\mu\delta-\mu^2)}{\beta\mu(\mu+\delta+\gamma)}$$

$$R^{**} = \frac{\beta K(\mu p+\gamma)-N\gamma\mu(\gamma+\mu)}{\beta\mu(\mu+\delta+\gamma)}$$

Bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) ditentukan dengan menggunakan metode *next generation matrix* yang melibatkan radius spektral. Hasil penentuan  $R_0$  dengan metode tersebut diperoleh

$$R_0 = \frac{\beta(\delta+\mu-\mu p)}{(\delta+\mu)(\gamma+\mu)}$$

Berdasarkan hasil analisis kestabilan titik ekuilibrium menunjukkan bahwa saat  $R_0 < 1$ , maka titik ekuilibrium non endemik  $E_0$  stabil asimtotik. Interpretasi dari hasil tersebut adalah jika syarat  $R_0 < 1$  terpenuhi, maka dalam waktu yang cukup lama tidak akan terjadi penyebaran penyakit campak pada subpopulasi yang rentan dan subpopulasi terinfeksi atau dengan kata lain wabah penyakit tersebut akan berhenti.

Dari hasil simulasi numerik, terbukti bahwa hasil analisis kestabilan titik ekuilibrium non endemik dinyatakan stabil jika  $R_0 < 1$  dan hasil analisis kestabilan titik ekuilibrium endemik dinyatakan stabil jika  $R_0 >$

Dari hasil simulasi numerik juga, menunjukkan bahwa jumlah individu dari subpopulasi sembuh akan meningkat jika nilai parameter  $p$  semakin tinggi, hal ini juga dipengaruhi oleh penurunan kekebalan tubuh sehingga individu yang sembuh kembali masuk ke subpopulasi rentan. Jumlah individu dari subpopulasi terinfeksi akan meningkat jika nilai parameter  $\beta$  semakin tinggi. Jumlah individu dari subpopulasi sembuh akan meningkat jika nilai parameter  $\gamma$  semakin tinggi.

## DAFTAR PUSTAKA

- Abubakar, S., Akinwande, N. I., Abdulrahman, S., & Oguntolu, F. A. (2013). Bifurcation analysis on the mathematical model of measles disease dynamics. *Universal Journal of Applied Mathematics*, 1(3), 97–104.
- Aulia, N., Kharis, M., & Supriyono. (2016). Pemodelan matematika epidemi influenza dengan memperhatikan peluang keberhasilan vaksinasi dan kekebalan tetap. *UNNES Journal of Mathematics*, 5(2), 123–131.
- Brauer, F., & Castillo-Chavez, C. (2000). *Mathematical models in population biology and epidemiology*. Springer.
- Bastin, G. (2018). *Lectures on mathematical modelling of biological systems*. GBIO 2060.
- Fredlina, K. Q., Oka, T. B., & Dwipayana, M. E. (2012). Model SIR (Susceptible, Infected, Recovered) untuk penyebaran penyakit tuberkulosis. *E-Jurnal Matematika*, 1(1), 52–58.
- Hethcote, H. W. (2000). The mathematics of infectious diseases. *SIAM Review*, 42(4), 599–653. <https://doi.org/10.1137/S0036144500371907>
- Kermack, W. O., & McKendrick, A. G. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 115(772), 700–721. <https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118>
- Lestari, P. D., & Tasman, H. (2013). Pengaruh strategi pulse vaccination terhadap pencegahan penyebaran penyakit campak. *E-Jurnal Matematika Universitas Gunadarma*, 7(4), 1–8.
- Murray, J. D. (2002). *Mathematical biology I: An introduction* (3rd ed.). Springer.
- Setiawan, B., dkk. (2008). *Penyakit infeksi dan parasit*. Jakarta: Sagung Seto.
- Widoyono. (2008). *Penyakit tropis: Epidemiologi, penularan, pencegahan, dan pemberantasannya*. Jakarta: Erlangga.
- World Health Organization. (2019). *Measles*. World Health Organization. <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/measles>