SAINTIFIK:
Jurnal Matematika, Sains, dan Pembelajarannya **Vol.12, No.1, Januari 2026, pp.58~64**
ISSN 2407-4098 (print) DOI:10.31605/saintifik.v12i1.629
ISSN 2622-8904 (online)

Aplikasi Aljabar Maksimum Minimum Untuk Pengoptimalan Masalah Aliran Maksimum pada Sistem Pemipaan Minyak

Eka Susilowati
Program Studi Matematika, Universitas Nahdlatul Ulama Al Ghazali Cilacap, Indonesia
e-mail: eka250@gmail.com

Abstrak

Graf merupakan salah satu bagian dari matematika. Begitu pula, salah satu struktur aljabar yang sudah banyak dibahas karena ada penerapan dalam kehidupan sehari hari, yaitu aljabar max min. Teori Graf digunakan untuk penggambaran jaringan yang dicari kapasistas maksimumnya. Penggunaan aljabar max min dan teori graf juga membentuk suatu teorema mengenai hal tersebut. Teorema ini yang nantinya akan digunakan untuk kapasitas maksimum suatu lintasan dari titik awal 1 ke titik akhir n. Pencarian kapasitas maksimum lintasan ini penting dilakukan karena memiliki banyak sekali manfaat dalam menghadapi permasalahan sehari hari. Penerapan dari pemanfaatan teorema yang dihasilkan untuk memperoleh lintasan kapasitas maksimum ini dapat digunakan pada jaringan komunikasi, jaringan kendaraan, jaringan pemipaan. Dalam industry minyak, pencarian kapasitas maksimum suatu jaringan diperlukan guna mengoptimalkan aliran minyak. Misalkan dengan memetakan koneksi antar node pada jaringan dapat menemukan titik lemah yang berpotensi mengganggu aliran minyak dan memperbaikinya sebelum berdampak besar.

Kata kunci*— Optimal, Aliran Maksimum, Algoritma Djikstra, Algoritma Ford Fulkerson, Aliran Pemipaan, Algoritma Edmund Karp, Aljabar Maksimum Minimum.*

1. PENDAHULUAN

Salah satu cabang ilmu Matematika terapan yang saat ini berkembang adalah teori graf. Teori graf memang salah satu bahasan yang sudah tua umurnya namun memiliki banyak terapan yang digunakan hingga saat ini. Graf biasanya dimanfaatkan untuk merepresentasikan obyek obyek yang bersifat diskrit dan menghubungkan antar obyek tersebut. Bentuk representasi visual graf ialah dengan menyatakan obyek dalam bentuk titik atau simpul dan menghubungkan dua obyek engan menggunakan garis atau bisa disebut sisi.

Teori graf mampu merepresentasikan suatu masalah menjadi lebih simple sehingga mampu mencari suatu Solusi. Penerapan teori graf yang memiliki manfaat besar adalah dengan membangun jaringan. Jaringan yang bisa dibangun dengan menggunakan graf adalah jaringan transportasi atau jaringan kerja. Suatu jaringan transportasi dapat menggambarkan model umum dalam mendistribusikan benda/ barang dari suatu tempat asal ke tempat tujuan dalam sebuah rute. Sebuah jaringan biasanya digunakan dalam system saluran pipa, system lalu lintas dengan kendala berupa batas maksimum terhadap benda atau barang yang diantar. Persoalan yang sering ada pada jaringan transportasi adalah bagaimana menentukan rute perjalanan sehingga jumlah total perjalanan yang dilakukan menjadi maksimum. Pada hal ini, permasalahan yang diangkat mengenai aliran maksimum yang terjadi pada system pemipaan minyak, dimana dicari rute yang mengakibatkan aliran minyak tersebut menjadi maksimum.

Masalah yang dibahas disini adalah masalah mengenai memaksimalkan arus pada suatu jaringan. Masalah mengenai aliran maksimum (maximum flow) sudah banyak dibahas seperti (Tanadi, 2007) dan (Manurung et al., 2023). Pembahasan sudah ada di algoritma Edmund Karp seperti di penelitian (Mustiko et al., 2023), (Mahesa, 2024), (Yoriko, 2019), (Rahayu, 2016), dan (SARAH, 2014). Sedangkan pembahasan aliran maksimum dengan algoritma Ford Fulkerson juga sudah dibahas oleh (Sumarti, 2017), (Rahma et al., 2016), (Aksan, 2016), (Farizal & Suyitno, 2014), (Aini, 2010), (Marpaung et al., 2023), dan (Achmad & Ilyas, 2020). Penulis juga pernah membahas aliran maksimum dengan algoritma max Min ini untuk kasus jaringan listrik (Susilowati et al., 2025) dan jaringan kendaraan (Susilowati, 2025). Arus maksimum untuk jaringan pemipaan dengan menggunakan algortma Max Min masih belum pernah dibahas. Hal ini memotivasi penulis untuk meneliti hal tersebut. Arus yang dimaksimalkan pada system pemipaam minyak. Pemaksimalan arus pada pemipaan minyak ini menjadi lebih kompleks Sistem pemipaan minyak ini, saluran yang menghubungkan sumber satu dengan yang lain pada jaringan pipa minyak kapasitas maksimum dari pipa minyak yang dilewati.

Untuk memecahkan permasalahan tersebut, digunakan algoritma maksimum minimum untuk menghitung kapasitas aliran maksimum pada pipa minyak. Selanjutnya, yang menjadi masalah adalah Ketika jaringan system pemipaan minyak tersebut dalam bentuk yang kompleks dengan melibatkan berbagai node yang saling berhubungan. Selanjutnya, jika kita menghitung dalam perhitungan menggunakan algoritma maksimum minimum, maka akan kesulitan dan butuh perhitungannya yang lama, sehingga pada penelitian ini dibuatlah program Mathlab yang digunakan untuk melakukan perhitungan pada system pemipaan yang kompleks. Perhitungan dengan menggunakan program Mathlab yang dibuat ini, hanya dengan memasukkan matriks adjacency hasil representasi dari system pemipaan

Jika pada penelitian sebelumnya, Amelia (Amelia, 2007) menjelaskan untuk mencari penyelesaian dalam masalah arus maksimum, metode yang diperkenalkan antara lain Ford – Fulkerson, metode max flow – min cut, algoritma Djisktra. Peneliti lain yaitu Sumarti (Sumarti, 2017) ternyata menggunakan algoritma Edmund – Karp dalam menyelesaikan masalah arus maksimum. Luaran dari penggunaan Ford – Fulkers on, metode max flow – min cut, algoritma Djisktra, dan algoritma Edmund Karp hanya berupa berapa besaran aliran maksimum yang dihasilkan. Namun, dengan menggunakan algoritma maksimum minimum ini, dapat diperoleh juga output berupa rute Dimana aliran maksimum tadi dihasilkan. Pada penelitian ini, diperkenalkan algoritma maksimum minimum untuk menyelesaikan masalah aliran maksimum pada permasalahan system pemipaan minyak. Keunggulan yang ada dari hasil penelitian ini, hasil yang berupa program Mathlab yang berlatar belakang pada algoritma maksimum minimum, diberikan tadi lebih simple dalam mencari aliran maksimumnya pada kasus ini system pemipaan minyaknya. Jika sebelumnya, kita harus menghitung pertahap dalam mencari aliran maksimum system pemipaan, maka dengan program Mathlab yang dibuat sesuai algoritma maksimum minimum ini, hanya tinggal memasukkan matriks adjacency saja yang merepresentasikan system pemipaan minyak atau system lain yang berkaitan dengan aliran maksimum suatu jaringan / system.

2. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan untuk memperoleh penyelesaian masalah aliran maksimum pada system pemipaan minyak adalah dengan memperoleh aljabar maksimum minimumnya. Aljabar maksimum minimum ini diperoleh dari suatu teorema yang merupakan sifat dari aljabar maksimum minimum. Setelah aljabar maksimum dan minimum diperoleh, langkah selanjutnya adalah merepresentasikan dalam program Mathlab sehingga mempermudah dalam pencarian lintasan aliran maksimum.

Gambar 1 Proses Penyelesaian Masalah Aliran Maksimum pada Sistem Pemipaan Minyak

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab pembahasan ini, akan dibahas mengenai penerapan aljabar max – min pada masalah kapasitas maksimum. Namun, akan dibahas terlebih dahulu beberapa teorema yang mendasari hal tersebut. Seperti aljabar max plus dan aljabar min plus, aljabar max min merupakan salah satu struktur aljabar juga. Namun ada beberapa perbedaan dalam aljabar max min.

Aljabar max min merupakan himpunan semua bilangan real R yang dilengkapi dengan operasi maksimum dan minimum. Aljabar max min ini dapat digunakan untuk memodelkan dan menganalisis masalah lintasan kapasitas maksimum. Diberikan $\mathbb{R}_{\varepsilon}^{+} = \mathbb{R}^{+} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\mathbb{R}^{+}$ merupakan himpunan semua bilangan real non negative ditambah dengan $\varepsilon = +\infty$. Di dalam himpunan $\mathbb{R}^{+}$ dilengkapkan operasi berikut :

$a \oplus b = \max(a,b)$ dan $a \otimes b = \min(a,b)$

Himpunan $(\mathbb{R}_{\varepsilon}^{+},\oplus,\otimes)$ merupakan semiring idempotent komutatif dengan elemen netral 0 dan elemen satuan $\varepsilon = +\infty$. Selanjutnya, $(\mathbb{R}_{\varepsilon}^{+},\oplus,\otimes)$ dinamakan debagai aljabar max min.

Pada permasalahan lintasan kapasitas maksimum, A_{ij} menandakan bilangan real non negative dan merupakan kapasitas busur (j,i), yaitu aliran maksimum yang dapat melalui busur (j,i). Berikut akan diberikan teorema yang digunakan dalam pencarian kapasitas maksimum lintasan dalam suatu jaringan.

Teorema 1

Diberikan $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{+}, \forall p \geq n, A^{\otimes p} \leq E \oplus A \oplus \ldots \oplus A^{\otimes n}$

Teorema 2

Diberikan $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{+}, \forall p \geq n, A* = E \oplus A \oplus \ldots \oplus A^{\otimes n} \oplus \ldots$

Berdasarkan Teorema 1 didapatkan $A^* = E \oplus A \oplus \ldots \oplus A^{\otimes n-1}$. Jika diperhatikan penjelasan tentang kapasitas dan pangkat matriks di atas, berikut diberikan hasil mengenai kapasitas maksimum lintasan dalam jaringan.

Teorema 3

Jika $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{+nxn}$ adalah matriks bobot suatu graf berarah berbobot, di mana bobot A_{ij} merupakan kapasitas busur (j, i), yaitu aliran maksimum yang dapat melalui busur (j, i), maka unsur $(A*)_{ij}$ merupakan kapasitas maksimum lintasan dengan ujung titik j dan pangkal titik i.

Berdasarkan pembahasan di atas, menyatakan bahwa unsur $(A*)_{ij}$ merupakan kapasitas maksimum lintasan dengan ujung titik j dan pangkal titik I dengan A merupakan matriks bobot pada graf berarah berbobot yang terkait. Dengan menggunakan hasil tersebut, kita dapat menentukan lintasan dengan kapasitas maksimumyang berawal dari titik 1 menuju titik terakhir n dalam suatu jaringan searah dengan bobot busurnya yang menggambarkan kapasitas dari busur yaitu kapasitas maksimum yang dapat dilalui oleh busur tersebut.

Berdasarkan penjelasan Teorema 3, dapat diartikan bahwa $(A*)_{n1}$ merupakan kapasitas maksimum lintasan dengan titik awal 1 ke titik akhir n. Kapasitas maksimum lintasan dengan titik awal 1 ke titik akhir n dinamakan kapasitas maksimum jaringan. Berikut ini akan diberikan definisi busur kapasitas maksimum dan lintasan kapasitas maksimum.

Definisi 4

Suatu busur (j,i) dalam jaringan lintasan searah dengan n titik merupakan busur kapasitas maksimum jika kapasitasnya tidak kurang dari kapasitas maksimum jaringan.

Definisi 5

Suatu lintasan disebut lintasan kapasitas maksimum jika seluruhnya terdiri dari busur kapasitas maksimum.

Menurut buku (Rudhito, 2016) terdapat suatu teorema yang menjelaskan bagaimana menentukan busur kapasitas maksimum. Namun di sini sedikit diberikan perubahan mengenai syarat suatu busur merupakan busur kapasitas maksimum. Berdasarkan definisi dan pembahasan sebelumnya, diperoleh teorema berikut :

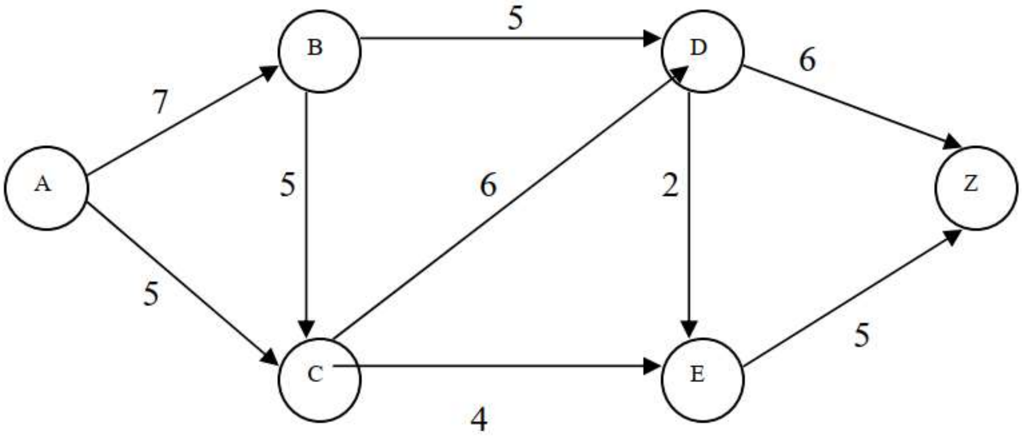
Teorema 6

Diberikan jaringan lintasan searah yang terdiri dari n titik dan matriks berbobot $A \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^{*nxn}$. Suatu busur (j,i) dalam jaringan merupakan busur kapasitas maksimum jika dan hanya jika $A_{ij} - \left(A^*\right)_{n1} \geq 0$.

Dalam permasalahan aliran arus kapasitas maksimum kendaraan ini, untuk titik yang tidak terhubung maka akan diberi nilai 0 pada matriks A.

3.1 Deskripsi dan Obyek Penelitian

Data yang digunakan berupa contoh kasus aliran maksimum system pemipaan (Aini, 2010) sebagaimana data di bawah ini.



Setelah aliran system pemipaan dibuat graf berarahnya, maka selanjutnya dibuat matriks adjacency nya. Berikut ini diberikan matriks adjencencynya:

0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0
5	5	0	0	0	0
0	5	6	0	0	0
0	0	4	2	0	0
0	0	0	6	5	0

Selanjutnya dibuat program Mathlab yang natinya digunakan untuk menentukan lintasan jaringan arus kapasitas maksimum system pemipaan. Program Mathlab ini, sangat membantu kita dalam mencari jaringan maksimum arus kapasitas maksimum system pemipaan pada kasus lain yang mungkin melibatkan arus kapasitas maksimum system pemipaan, dimana matriks adjencencynya merupakan matriks yang berukuran besar.

Pada program Mathlab ini diawali dengan sebagai perhitungan dari Teorema 6 :

1. Memasukkan matriks A yang merupakan matriks adjecensi dari jaringan pipa.
2. Menghitung A+.
3. Menghitung E.
4. Menghitung A* yaitu maksimum antara E dan A+.
5. Menghitung P yaitu A-A*(n,1)

Berikut ini merupakan hasil dari program Matlab yang telah dijalankan
maxminstar1
Masukkan matriks Anxn = [0 0 0 0 0 0; 7 0 0 0 0 0; 5 5 0 0 0 0; 0 5 6 0 0 0; 0 0 4 2 0 0; 0 0 0 6 5 0]

Matriks A_plus

0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0
5	5	0	0	0	0

5	5	6	0	0	0
4	4	4	2	0	0
5	5	6	6	5	0

A1_star =

Inf	0	0	0	0	0
7	Inf	0	0	0	0
5	5	Inf	0	0	0
5	5	6	Inf	0	0
4	4	4	2	Inf	0
5	5	6	6	5	Inf

P =

-5	-5	-5	-5	-5	-5
2	-5	-5	-5	-5	-5
0	0	-5	-5	-5	-5
-5	0	1	-5	-5	-5
-5	-5	-1	-3	-5	-5
-5	-5	-5	1	0	-5

Matriks A

0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0
5	5	0	0	0	0
0	5	6	0	0	0
0	0	4	2	0	0
0	0	0	6	5	0

Matriks A_star

Inf	0	0	0	0	0
7	Inf	0	0	0	0
5	5	Inf	0	0	0
5	5	6	Inf	0	0
4	4	4	2	Inf	0
5	5	6	6	5	Inf

Matriks P

-5	-5	-5	-5	-5	-5
2	-5	-5	-5	-5	-5
0	0	-5	-5	-5	-5
-5	0	1	-5	-5	-5
-5	-5	-1	-3	-5	-5
-5	-5	-5	1	0	-5

Berdasarkan hasil dari program Matlab, dihasilkan busur maksimum jaringan tersebut adalah (1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,4),(4,6),(5,6). Hasil ini diperoleh dengan melihat pasangan node yang bernilai lebih besar dari sama dengan 0 sesuai dengan Teorema 6.

-5	-5	-5	-5	-5	-5
2	-5	-5	-5	-5	-5
0	0	-5	-5	-5	-5
-5	0	1	-5	-5	-5

-5	-5	-1	-3	-5	-5
-5	-5	-5	1	0	-5

Sehingga lintasan maksimum jaringan yang mungkin terbentuk dari node 1 ke node 6 adalah (1,2) ,(2,3),(3,4),(4,6). Pada penelitian (Aini, 2010), aliran kapasitas arus maksimum kendaraan berbeda yang didapatkan adalah (1,3), (3,5), (5,6).

Berdasarkan (Aini, 2010) menggunakan algoritma Folk – Furkenson hanya menghasilkan jumlah kapasitas maksimum yang dapat dilalui pada jaringan system pemipaan sebesar 1100 liter per jam. Namun dalam penelitian ini, peneliti mencari lintasan kapasitas maksimum jaringan system pemipaan. Jumlah kapasitas maksimum yang terjadi di jaringan system pemipaan dengan aljabar max min sebesar 2400 liter per jam. Pada konsepnya, lintasan kapasitas maksimum yang dicari menggunakan algoritma Max-Min sebenarnya merupakan lintasan yang masih mampu dilintasi arus minyak yang terdiri dari busur kapasitas maksimum. Kenapa dikatakan mampu dilewati? Karena lintasan kapasitas maksimum yang terpilih, harus tidak boleh melewati kapasitas maksimum yang digambarkan sebagai kapasitas maksimum lintasan dengan titik awal 1 ke titik akhir n $\left(A^*\right)_{n1}$. Akibat selanjutnya ketika busur tersebut dilewati arus munyak yang melebihi $\left(A^*\right)_{n1}$, maka jika terjadi pada jaringan system pemipaan maka akan berakibat tidak mengalir.

Jika dibandingkan dengan algoritma Djikstra dan algoritma Ford Fulkeson pada penelitian (Aini, 2010), menghasilkan jaringan pemipaan yang berbeda dengan aliran minyak yang dihasilkan 1100 liter/ jam. Oleh karena itu dapat dilihat bahwa hasil aliran pemipaan dengan algoritma Max Min lebih banyak menghasilkan aliran minyak pada pemipaannya.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian di atas, dapat digunakan aljabar maksimum minimum dalam mencari jaringan sistem pemipaan. Permasalahan yang dibahas pada penelitian ini menghasilkan solusi jaringan sistem pemipaan yang dihasilkan adalah (1,2) ,(2,3),(3,4),(4,6) dengan besar jumlah arus maksimum yang dapat melalui system pemipaan sebesar 2400 liter per jam. Dengan adanya hasil tersebut, Ketika terjadi masalah aliran minyak pada pemipaan dapat diketahui sumber kerusakannya, karena tahu aliran minyak berasal dari pipa ke berapa. Algoritma Max Min dapat menghasilkan aliran minyal pada kasus pemipaan ini lebih banyak dari algoritma Djikstra dan algoritma Ford Fulkeson.

DAFTAR PUSTAKA

Achmad, S., & Ilyas, M. (2020). Penerapan Modifikasi Algoritma Ford-Fulkerson untuk Memaksimumkan Flow Pada Pengiriman Barang. *Infinity: Jurnal Matematika Dan Aplikasinya*, *1*(1), 29–35. https://doi.org/10.30605/27458326-18

Aini, K. (2010). *Menggunakan Algoritma Dijkstra Dan Algoritma Ford-Fulkerson Menggunakan Algoritma Djikstra Dan Algoritma Ford-Fulkerson*.

Aksan, T. S. (2016). *PENERAPAN ALGORITMA FORD FULKERSON DAN ALGORITMA DINIC PADA PENCARIAN ALIRAN MAKSIMUM JARINGAN LISTRIK (Studi*.

Amelia, M. A. (2007). *Optimasi Arus Maksimum Pada Jaringan*.

Farizal, T., & Suyitno, H. (2014). Unnes Journal of Mathematics PENCARIAN ALIRAN MAKSIMUM DENGAN ALGORITMA FORD-FULKERSON (Studi Kasus pada Jaringan Listrik Kota Tegal). *Unnes Journal of Mathematics*, *3*(1), 12–19.

Mahesa, N. (2024). Implementasi Algoritma Edmond-Karp Pada Pencarian Aliran Maksimum. *Buletin Ilmiah Math. Stat. Dan Terapanya (Bimaster)*, *13*(3), 331–338.

Manurung, H., Ginting, T., Surbakti, A., & Harahap, A. J. (2023). Solving the maximum flow problem with the lift-to-front algorithm. *Jurnal Mantik*, *7*(2).

Marpaung, F., Arnita, A., & Sari, N. (2023). Maximal Flow of Transportation Network in Medan City Using Ford-Fulkerson Algorithm. *International Journal of Science, Technology & Management*, *4*(1), 100–106.

https://doi.org/10.46729/ijstm.v4i1.724
Mustiko, P. J., Arifin, M., & Yuniarti, E. (2023). PENENTUAN ALIRAN ARUS MAKSIMUM PADA JARINGAN LISTRIK DENGAN MENERAPKAN ALGORITMA EDMONS KARP. *Jurnal Teknik Industri*, 116–122.

Rahayu, E. (2016). Penerapan Algoritma Cloning-Based Dan Algoritma Edmonds-Karp Dalam Penyelesaian Maximum Flow Problem. *Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam*.

Rahma, I. N., Permanasar, Y., & Respitawulan. (2016). Aplikasi Aliran Maksimum Pada Jaringan Listrik Menggunakan Metode Ford-Fulkerson. *Prosiding Matematika*, *2*(2), 166–171.

Rudhito, M. A. (2016). Aljabar max-plus dan penerapannya. *Universitas Sanata Dharma Yogyakarta*.

SARAH, N. (2014). *PENENTUAN ALIRAN ARUS MAKSIMUM PADA JARINGAN LISTRIK DENGAN MENERAPKAN ALGORITMA EDMONS KARP*.

Sumarti, F. (2017). Pencarian Aliran Makasimum Dengan Algoritma Ford-Fulkerson dan Modifikasinya. *Buletin Ilmiah Matematika, Statistika, Dan Terapannya (Bimaster)*, *6*(1), 29–36.

Susilowati, E. (2025). *Penerapan Algoritma Maksimum Minimum dalam Pencarian Aliran Maksimum Kendaraan*. *11*(2), 208–213. https://doi.org/10.31605/saintifik.v11i2.600

Susilowati, E., Ahmad, M., Matematika, P. S., Nahdlatul, U., Al, U., Cilacap, G., Maksimum, A., Djikstra, A., Fulkerson, A. F., Jaringan, R., & Karp, A. E. (2025). *Penerapan Algoritma Maksimum Minimum Dalam Mencari Aliran Maksimum Jaringan Listrik*. *11*(1), 120–128. https://doi.org/10.31605/saintifik.v11i1.553

Tanadi, K. (2007). *Analisis Kompleksitas Algoritma Untuk Menyelesaikan Permasalahan Maximum Flow*.

Yoriko, N. P. (2019). *Penggunaan Algoritma Edmonds-Karp dalam MEncari Debit Air Maksimum dari Sitem Kanal Bawah Tanah*.