

Model Matematika tentang Dinamika Fractional-Order Penyakit Kolera dengan Vaksinasi

Taufan Talib^{1*}, Novita Serly Laamena²

^{1,2}Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Pattimura, Indonesia

e-mail: taufan.talib@gmail.com

Abstrak

Kolera adalah penyakit infeksi yang disebabkan oleh bakteri *Vibrio cholerae*, yang sering ditularkan melalui air dan makanan yang terkontaminasi. Penelitian ini mengembangkan model matematika berbasis *fractional-order derivatives* untuk menganalisis dinamika penyakit kolera dengan mempertimbangkan efek vaksinasi. Model yang diusulkan memodifikasi model kolera yang sudah ada dengan menambahkan kompartemen vaksinasi dan menggunakan *fractional-order derivatives* untuk memperhitungkan efek memori dalam dinamika penyakit. Studi ini mengevaluasi stabilitas titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik menggunakan analisis matriks Jacobian dan teorema Gershgorin. Simulasi numerik menunjukkan dampak tingkat vaksinasi, hilangnya kekebalan, dan *fractional-order* terhadap perkembangan penyakit. Hasil menunjukkan bahwa tingkat vaksinasi yang lebih tinggi dan penggunaan *fractional-order* secara signifikan meningkatkan pengendalian penyakit, sementara hilangnya kekebalan menjadi tantangan untuk stabilitas jangka panjang. Model ini menawarkan pendekatan yang lebih fleksibel untuk merancang strategi pengendalian kolera yang efektif.

Kata kunci—*Fractional-order; Model Penyakit Kolera; Vaksinasi*

1. PENDAHULUAN

Kolera adalah penyakit infeksi serius yang disebabkan oleh bakteri *vibrio cholerae*, sering kali menyebar melalui air dan makanan yang terkontaminasi. Penyakit ini menjadi tantangan kesehatan masyarakat global, terutama di daerah dengan sanitasi yang buruk. Pencegahan dan pengendalian kolera sangat bergantung pada vaksinasi, edukasi, dan perbaikan sanitasi (Yasen et al, 2024; Jakob et al, 2023; Oshinubi et al, 2023; Muhsen et al. 2016). Model matematika memainkan peran penting dalam memahami dinamika penyakit menular, termasuk kolera. Model ini memungkinkan para peneliti untuk memprediksi penyebaran penyakit, mengevaluasi efektivitas intervensi seperti vaksinasi, dan merancang strategi pengendalian (Brhane, 2024).

Model matematika klasik berbasis persamaan diferensial biasa (ODE) sering kali tidak mencakup memori atau efek historis dalam dinamika penyakit. Oleh karena itu, penggunaan *fractional-order derivative* memberikan fleksibilitas tambahan untuk memodelkan dinamika penyakit yang kompleks (Yasen et al, 2024). Vaksinasi adalah salah satu intervensi kunci untuk mengurangi dampak kolera. Namun, keberhasilan vaksinasi tergantung pada beberapa faktor, seperti laju vaksinasi, kehilangan kekebalan, serta interaksi antara populasi rentan, populasi yang divaksinasi, dan populasi yang terinfeksi dengan populasi bakteri (Nuha, 2020; Jakob et al, 2023; Oshinubi et al, 2023). Pada penelitian ini merupakan hasil modifikasi dari Yaseen et al. (2024) dengan menambahkan kompartemen vaksinasi berdasarkan (Jakob et al. 2023; Oshinubi et al. 2024; Cui et al. 2022).

Adapun tujuan penelitian untuk: (1) memodifikasi model kolera yang ada dengan menambahkan kompartemen vaksinasi; (2) menggunakan pendekatan *fractional-order derivative* untuk memahami efek memori dalam dinamika penyakit; (3) mengevaluasi kestabilan titik tetap bebas infeksi dan endemik; serta (4) melakukan simulasi numerik untuk menganalisis pengaruh parameter vaksinasi, kehilangan kekebalan, dan *fractional order* terhadap dinamika penyakit.

2. METODE PENELITIAN

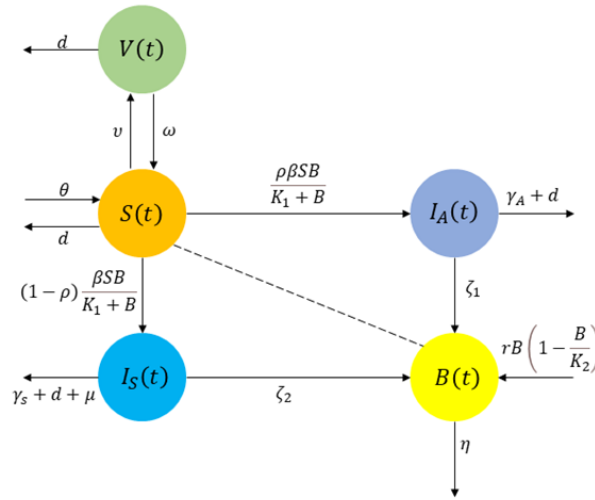
Pada bagian ini akan dipaparkan “Model Matematika tentang Dinamika *fractional-order* Penyakit Kolera dengan Vaksinasi”. Kemudian akan dijelaskan mengenai kepositifan dan keterbatasan solusi model.

2.1 Model Matematika

Model matematika tentang dinamika *fractional-order* penyakit kolera dengan vaksinasi dapat dilihat pada gambar 1. Pada penelitian ini diperoleh model yang lebih kompleks dibandingkan dengan model-model sebelumnya sehingga model yang terbentuk dapat lebih menggambarkan pengaruh vaksinasi terhadap dinamika *fractional-order* penyakit kolera.

Adapun asumsi dari model yang dibentuk, yaitu:

- Efek kekebalan vaksin hanya mempengaruhi populasi rentan (S), mengurangi kemungkinan individu terkena infeksi, serta kehilangan kekebalan (ω) mengembalikan individu yang divaksinasi (V) menjadi rentan.
- Efek tidak langsung pada populasi terinfeksi dapat mengurangi individu rentan (S) dan menurunkan transmisi bakteri dari B ke individu baru.



Gambar 1. Modifikasi model kolera dengan vaksinasi

Muhseen et al. (2016) mengusulkan model kolera klasik yang diformulasikan dengan sistem persamaan diferensial orde berikut.

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \theta + \omega V - \frac{\beta SB}{K_1 + B} - vS - dS \\
 \frac{dV}{dt} &= vS - \omega V - dV \\
 \frac{dI_A}{dt} &= \frac{\rho \beta SB}{K_1 + B} - (\gamma_A + d)I_A \\
 \frac{dI_S}{dt} &= (1 - \rho) \frac{\beta SB}{K_1 + B} - (\gamma_S + d + \mu)I_S \\
 \frac{dR}{dt} &= \gamma_A I_A + \gamma_S I_S - dR \\
 \frac{dB}{dt} &= rB \left(1 - \frac{B}{K_2}\right) - \eta B + \zeta_1 I_A + \zeta_2 I_S
 \end{aligned} \tag{1}$$

Jika efek memori diperhitungkan, model (1) ini dimodifikasi menggunakan **Caputo fractional-order derivative** (D^α) untuk memasukkan dampak historis (Muhsen et al., 2016), sehingga menghasilkan formulasi:

$$\begin{aligned}
 D^\alpha S(t) &= \theta + \omega V - \frac{\beta SB}{K_1 + B} - vS - dS; S(0) > 0 \\
 D^\alpha V(t) &= vS - \omega V - dV; V(0) \geq 0 \\
 D^\alpha I_A(t) &= \frac{\rho \beta SB}{K_1 + B} - (\gamma_A + d)I_A; I_A(0) \geq 0 \\
 D^\alpha I_S(t) &= (1 - \rho) \frac{\beta SB}{K_1 + B} - (\gamma_S + d + \mu)I_S; I_S(0) \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^\alpha R(t) &= \gamma_A I_A + \gamma_S I_S - dR; R(0) \geq 0 \\ D^\alpha B(t) &= rB \left(1 - \frac{B}{K_2}\right) - \eta B + \zeta_1 I_A + \zeta_2 I_S; B(0) \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Dengan *fractional-order derivative* $0 < \alpha < 1$, dapat menambahkan fleksibilitas dalam memodelkan memori dan perilaku epidemiologis yang kompleks. Selanjutnya variabel dan parameter yang digunakan dalam model (2) ditunjukkan pada tabel (1) dan (2).

Tabel 1. Variabel Penelitian

Variabel	Deskripsi
$S(t)$	Individu Rentan
$V(t)$	Individu yang divaksinasi
$I_A(t)$	Individu yang terinfeksi tanpa gejala
$I_S(t)$	Individu yang terinfeksi dengan gejala
$R(t)$	Individu Sembuh
$B(t)$	Populasi bakteri

Tabel 2. Parameter Penelitian

Parameter	Deskripsi	Nilai	Referensi
θ	Laju Kelahiran	20	Yaseen et al. (2024)
β	Laju kontak yang menyebabkan infeksi	0,01	Yaseen et al. (2024)
$\rho \in [0,1]$	Proporsi infeksi tanpa gejala	0,2	Yaseen et al. (2024)
$K_i, i = 1,2$	Kapasitas daya dukung untuk populasi bakteri	0,1; 80	Yaseen et al. (2024)
v	Laju vaksinasi populasi rentan menjadi populasi yang divaksinasi	$0 < v < 1$	Asumsi
ω	Kehilangan kekebalan vaksinasi	$0 < \omega < 1$	Asumsi
d	Laju Kematian Alami	0,1	Yaseen et al. (2024)
μ	Tingkat kematian akibat penyakit	0,1	Yaseen et al. (2024)
γ_A, γ_S	Tingkat pemulihan dari infeksi tanpa gejala dan dengan gejala	0,02; 0,1	Yaseen et al. (2024)
r	Tingkat pertumbuhan intrinsik bakteri	0,1	Yaseen et al. (2024)
η	Tingkat peluruhan bakteri	0,3	Yaseen et al. (2024)
$\zeta_i, i = 1,2$	Kontribusi infeksi dari individu tanpa gejala dan dengan gejala terhadap peningkatan populasi bakteri	0,1	Yaseen et al. (2024)

2.2 Kepositifan dan Keterbatasan Solusi Model

Akan ditunjukkan bahwa solusi semua variabel (S, V, I_A, I_S, R, B) tetap positif untuk $t \geq 0$, dengan syarat kondisi awal positif. *Caputo fractional-order derivative* (D^α), turunan untuk fungsi non-negatif ($x \geq 0$) tidak akan membuat nilai $x(t)$ menjadi negatif, selama kondisi awal juga non-negatif.

$$D^\alpha x(t) \geq 0 \Rightarrow x(t) \geq 0, \forall t \geq 0.$$

Selanjutnya dengan asumsikan bahwa semua parameter model fraksional adalah positif, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} D^\alpha S(t)|_{S=0} &= \theta > 0 \\ D^\alpha V(t)|_{V=0} &= vS \geq 0 \\ D^\alpha I_A(t)|_{I_A=0} &= \frac{\rho\beta SB}{K_1 + B} \geq 0 \\ D^\alpha I_S(t)|_{I_S=0} &= (1 - \rho) \frac{\beta SB}{K_1 + B} \geq 0 \\ D^\alpha R(t)|_{R=0} &= \gamma_A I_A + \gamma_S I_S \geq 0 \\ D^\alpha B(t)|_{B=0} &= \zeta_1 I_A + \zeta_2 I_S \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Berdasarkan (3) dapat dilihat bahwa solusi model adalah non-negatif

Teorema 1. Solusi dari Model (2) adalah Terbatas

Bukti:

Definisikan total populasi $N(t)$ sebagai $N(t) = S(t) + V(t) + I_A(t) + I_S(t) + R(t)$

Dengan menjumlahkan seluruh persamaan *fractional-order* dari model diperoleh,

$$D^\alpha N(t) = \theta - dN(t) - \mu I_S(t)$$

Karena $I_S(t) \geq 0$, maka $D^\alpha N(t) \leq \theta - dN(t)$

Selanjutnya dengan transformasi Laplace untuk persamaan *fractional-order* ($D^\alpha N(t)$) didapat,

$$\mathcal{L}\{D^\alpha N(t)\} = \lambda^\alpha \mathcal{L}\{N(t)\} - \lambda^{\alpha-1} N(0)$$

Mengaplikasikan transformasi Laplace ke persamaan $\lambda^\alpha \mathcal{L}\{N(t)\} - \lambda^{\alpha-1} N(0) = \frac{\theta}{\lambda} - d \mathcal{L}\{N(t)\}$

Sehingga diperoleh,

$$\mathcal{L}\{N(t)\} = \frac{\frac{\theta}{\lambda} + \lambda^{\alpha-1} N(0)}{\lambda^\alpha + d}$$

Untuk mengembalikan solusi ke domain waktu, digunakan sifat dari *Mittag-Leffler Function*,

$$E_{\alpha,\beta}(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

Solusi invers Laplace dari $\frac{1}{\lambda^\alpha + d}$ adalah $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\lambda^\alpha + d}\right\} = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-dt^\alpha)$

Dengan demikian, solusi untuk $N(t)$ diperoleh,

$$N(t) = N(0) E_{\alpha,1}(-dt^\alpha) + \frac{\theta}{d} (1 - t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-dt^\alpha))$$

Selanjutnya untuk $t \rightarrow \infty$, sifat dari fungsi Mittag-Leffler memberikan $E_{\alpha,\beta}(Z) \rightarrow 0$ jika $Z \rightarrow \infty$

Sehingga $N(t) \rightarrow \frac{\theta}{d}$, untuk $t \rightarrow \infty$

Hal ini mengalibatkan populasi total $N(t)$ terbatas dan tidak pernah melebihi $\frac{\theta}{d}$

Pada persamaan untuk $B(t)$ adalah

$$D^\alpha B(t) = rB \left(1 - \frac{B}{K_2}\right) - \eta B + \zeta_1 I_A + \zeta_2 I_S$$

Dengan analisis serupa diperoleh,

- Saat $t \rightarrow \infty$, $B(t)$ mendekati kapasitas daya dukung lingkungan K_2 .
- Karena kontribusi $\zeta_1 I_A + \zeta_2 I_S$ terbatas (berasal dari $N(t)$), maka $B(t)$ juga terbatas.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas tentang titik tetap, bilangan reproduksi dasar, analisis kestabilan dan simulasi numerik.

3.1 Titik Tetap

Variabel $R(t)$ tidak muncul pada persamaan lain dari model (2), sehingga dapat direduksi model tersebut, tanpa mengikutsertakan model $D^\alpha R(t)$ pada analisis titik tetap. Titik tetap diperoleh dari kondisi Mukhlis et al. (2021),

$$\begin{aligned} D^\alpha S(t) &= \theta + \omega V - \frac{\beta S B}{K_1 + B} - vS - dS = 0 \\ D^\alpha V(t) &= vS - \omega V - dV = 0 \\ D^\alpha I_A(t) &= \frac{\rho \beta S B}{K_1 + B} - (\gamma_A + d) I_A = 0 \\ D^\alpha I_S(t) &= (1 - \rho) \frac{\beta S B}{K_1 + B} - (\gamma_S + d + \mu) I_S = 0 \\ D^\alpha B(t) &= rB \left(1 - \frac{B}{K_2}\right) - \eta B + \zeta_1 I_A + \zeta_2 I_S = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Secara biologis, model (4) memiliki dua titik tetap, yaitu:

- Titik tetap bebas infeksi (E_0): Penyakit tidak ada di populasi ($I_A(t) = 0, I_S(t) = 0, B(t) = 0$).

Dengan mensubstitusi $I_A(t) = 0, I_S(t) = 0, B(t) = 0$ ke model (4) diperoleh titik tetap bebas infeksi $E_0 = (S^*, V^*, I_A^*, I_S^*, B^*) = \left(\frac{\theta}{v+d}, \frac{\theta v}{(v+d)(\omega+d)}, 0, 0, 0\right)$

- Titik tetap endemik (E_1): Penyakit tetap bertahan di populasi ($I_A(t) > 0, I_S(t) > 0, B(t) > 0$). Pada kondisi ini, semua kompartemen (S, V, I_A, I_S, B) memiliki nilai positif pada kesetimbangan, dengan substitusi satu per satu, diperoleh titik tetap endemik:

$$E_1 = (S^*, V^*, I_A^*, I_S^*, B^*) = \left(\frac{\theta}{\frac{\beta B^*}{K_1 + B^*} + (v+d) - \frac{\omega v}{\omega+d}}, \frac{v S^*}{\omega+d}, \frac{\rho \frac{\beta S^* B^*}{K_1 + B^*}}{\gamma_A + d}, \frac{(1-\rho) \frac{\beta S^* B^*}{K_1 + B^*}}{\gamma_S + d + \mu}, B^* \right)$$

3.2 Bilangan Reproduksi Dasar

Penentuan bilangan reproduksi dasar ($\mathbb{R}_0$) menggunakan metode *Next-Generation Matrix* (NGM) (Driessche and Watmough, 2002). Bilangan reproduksi dasar ditentukan dengan didasarkan pada subpopulasi-subpopulasi penyebab infeksi, Adapun variabel infeksi dalam model adalah I_A dan I_S . Maka, sistem persamaan yang relevan adalah

$$\begin{aligned} D^\alpha I_A(t) &= \frac{\rho \beta S B}{K_1 + B} - (\gamma_A + d) I_A \\ D^\alpha I_S(t) &= (1 - \rho) \frac{\beta S B}{K_1 + B} - (\gamma_S + d + \mu) I_S \end{aligned} \quad (5)$$

Komponen penyebaran penyakit berasal dari bagian infeksi ($\frac{\beta S B}{K_1 + B}$), sehingga

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\rho \beta S B}{K_1 + B} \\ (1 - \rho) \frac{\beta S B}{K_1 + B} \end{bmatrix}$$

Komponen transisi meliputi pemulihan dan kematian dari I_A dan I_S ,

$$G = \begin{bmatrix} (\gamma_A + d) & 0 \\ 0 & (\gamma_S + d + \mu) \end{bmatrix}$$

NGM dihitung sebagai FG^{-1} ,

$$FG^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\rho \beta S B}{K_1 + B} & 0 \\ (1 - \rho) \frac{\beta S B}{K_1 + B} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(\gamma_A + d)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\gamma_S + d + \mu)} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh,

$$FG^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\rho \beta S B}{(K_1 + B)(\gamma_A + d)} & 0 \\ 0 & \frac{(1 - \rho) \beta S B}{(K_1 + B)(\gamma_S + d + \mu)} \end{bmatrix}$$

Karena $\mathbb{R}_0$ adalah nilai eigen terbesar dari matriks FG^{-1} , maka

$$\mathbb{R}_0 = \max \left\{ \frac{\rho \beta S B}{(K_1 + B)(\gamma_A + d)}, \frac{(1 - \rho) \beta S B}{(K_1 + B)(\gamma_S + d + \mu)} \right\}$$

3.3 Analisis Kestabilan

Bagian ini memaparkan sifat-sifat kestabilan titik tetap model *fractional-order* penyakit kolera dengan vaksinasi, yaitu titik tetap bebas infeksi (E_0) dan titik tetap endemik (E_1).

Teorema 2. Jika $\mathbb{R}_0 < 1$ dan kondisi $r < \eta$, maka titik tetap bebas infeksi (E_0) untuk model (4) bersifat stabil asimtotik lokal.

Bukti:

Melalui pelinieran sistem persamaan (4) di sekitar E_0 , maka sifat kestabilan matriks Jacobian dari persamaan

(4) $E_0 = (S^*, V^*, I_A^*, I_S^*, B^*) = \left(\frac{\theta}{v+d}, \frac{\theta v}{(v+d)(\omega+d)}, 0, 0, 0 \right)$ dapat diketahui. Selanjutnya, diperoleh matriks Jacobi untuk titik tetap bebas infeksi (E_0) sebagai berikut:

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} -(v+d) & \omega & 0 & 0 & -\frac{\beta\theta}{K_1(v+d)} \\ v & -(\omega+d) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\gamma_A+d) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\gamma_S+d+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & r-\eta \end{bmatrix}$$

Selanjutnya nilai eigen titik tetap bebas infeksi (E_0) diperoleh dengan cara $|J_{E_0} - \lambda I| = 0$, atau

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} -(v+d)-\lambda & \omega & 0 & 0 & -\frac{\beta\theta}{K_1(v+d)} \\ v & -(\omega+d)-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\gamma_A+d)-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\gamma_S+d+\mu)-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & r-\eta-\lambda \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$[\lambda^2 + \lambda[(v+d) + (\omega+d)] + (v+d) + (\omega+d) - v\omega] \cdot [-(\gamma_A+d) - \lambda] \cdot [-(\gamma_S+d+\mu) - \lambda] \cdot [r - \eta - \lambda] = 0 \quad (6)$$

Berdasarkan persamaan karakteristik (6), terdapat tiga nilai eigen bernilai negatif, yaitu:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -(\gamma_A+d) \\ \lambda_2 &= -(\gamma_S+d+\mu) \\ \lambda_3 &= r - \eta, \text{ stabil jika } r < \eta \end{aligned}$$

Sedangkan dua nilai eigen lainnya dapat diperoleh dengan melalui penyelesaian berikut:

$$\lambda^2 + \lambda[(v+d) + (\omega+d)] + (v+d) + (\omega+d) - v\omega = 0 \quad (7)$$

Persamaan (7) pada titik tetap E_0 bersifat stabil jika memenuhi kriteria Routh-Hurwitz (Driessche and Watmough, 2002), berikut:

Pada persamaan (7) disederhanakan menjadi

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (8)$$

Dengan

$$a_1 = (v+d) + (\omega+d) = v + \omega + 2d$$

$$a_0 = (\omega+d) - v\omega, \text{ jika } (\omega+d) > v\omega$$

Sehingga $a_1 > 0$ dan $a_0 > 0$.

Koefisien a_1 dan a_0 bernilai positif karena semua parameter bernilai positif. Jadi terbukti $\mathbb{R}_0 < 1$ dan $r < \eta$, maka titik tetap bebas infeksi (E_0) untuk model (4) bersifat stabil asimtotik lokal.

Teorema 2. Jika $\mathbb{R}_0 > 1$ dan $d > \text{Max.}\{\zeta_1 - \gamma_A, \zeta_2 - (\gamma_S + \mu)\}$ dan $\eta K_2 + 2rB^* > rK_2$, maka titik endemik (E_1) untuk model (4) bersifat stabil asimtotik lokal.

Bukti:

Matriks Jacobian untuk titik tetap endemik (E_1) pada persamaan (4) sebagai berikut:

$$J_{E_1} = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 & 0 & J_{15} \\ J_{21} & J_{22} & 0 & 0 & 0 \\ J_{31} & 0 & J_{33} & 0 & 0 \\ J_{41} & 0 & 0 & J_{44} & 0 \\ 0 & 0 & J_{53} & J_{54} & J_{55} \end{bmatrix}$$

Dengan $J_{11} = -v - d - \frac{\beta B^*}{K_1+B^*}$; $J_{15} = \frac{\beta S^*}{K_1+B^*} + \frac{\beta S^* B^*}{(K_1+B^*)^2}$; $J_{21} = v$; $J_{22} = -(\omega+d)$; $J_{31} = \rho \frac{\beta B^*}{K_1+B^*}$; $J_{33} = -(\gamma_A+d)$; $J_{41} = (1-\rho) \frac{\beta B^*}{K_1+B^*}$; $J_{44} = -(\gamma_S+d+\mu)$; $J_{53} = \zeta_1$; $J_{54} = \zeta_2$; $J_{55} = r - \frac{2rB^*}{K_2} - \eta$.

Dengan menerapkan teorema pertama Gershgorin (Johnson & Horn, 1985) menyatakan bahwa semua nilai eigen (λ) dari matriks J_{E_1} terletak didalam union cakram Gershgorin dibidang kompleks.

Setiap elemen diagonal J_{ii} menjadi pusat cakram, dan radiusnya adalah jumlah nilai absolut elemen non-diagonal di baris tersebut:

$$R_i = \sum_{j \neq i} |J_{ij}|$$

Cakram untuk baris i adalah

$$D_i = \{Z \in \mathbb{C} : |Z - J_{ii}| \leq R_i\}$$

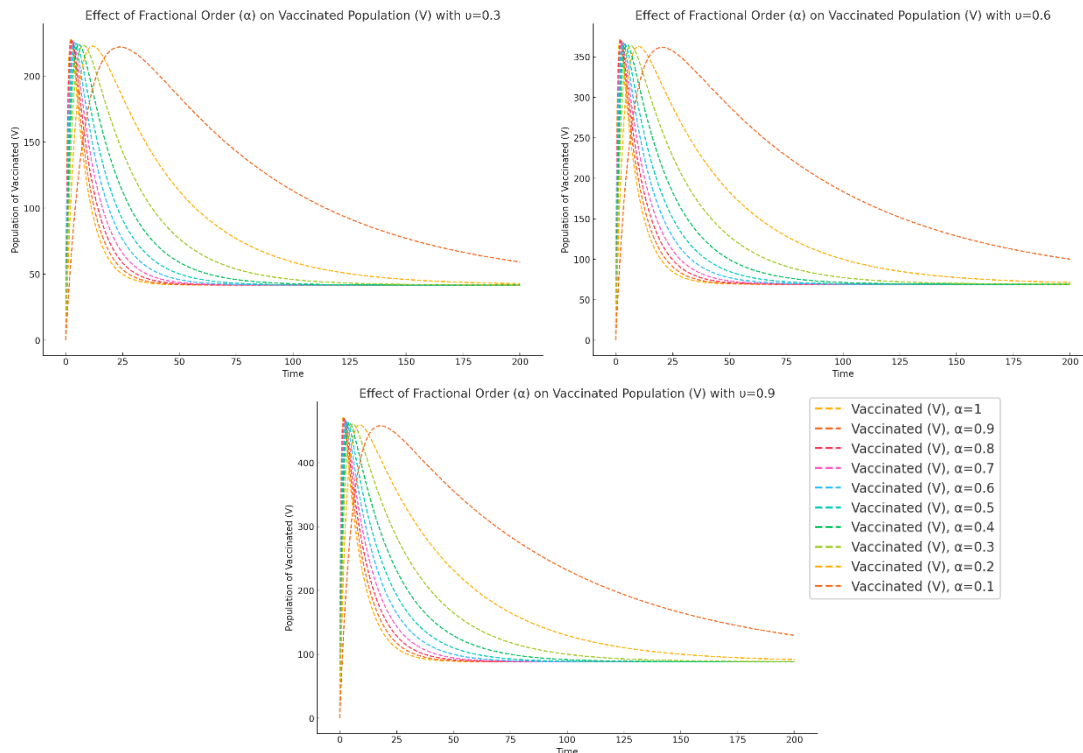
maka, untuk setiap baris i :

$$|Z - J_{ii}| \leq R_i$$

Jika semua cakram terletak di setengah bidang kiri ($\Re(\lambda) < 0$), maka semua nilai eigen memiliki bagian real negatif dan matriks J_{E_1} stabil. Dengan menerapkan teorema pertama Gershgorin, semua cakram Gershgorin untuk matriks Jacobian terletak di setengah bidang kiri jika $\mathbb{R}_0 > 1$ dan $d > \text{Max.}\{\zeta_1 - \gamma_A, \zeta_2 - (\gamma_S + \mu)\}$ dan $\eta K_2 + 2rB^* > rK_2$. Sehingga semua nilai eigen memiliki bagian real negatif dan titik tetap endemik (E_1) bersifat stabil asimtotik lokal.

3.4 Simulasi Numerik

Hasil simulasi menunjukkan dinamika populasi divaksinasi (V) yang dipengaruhi oleh variasi laju vaksinasi (v), kehilangan kekebalan vaksinasi (ω) dan *fractional order* (α). Secara khusus, *fractional order* (α) menggambarkan efek memori dalam model vaksinasi, sedangkan laju vaksinasi (v) menentukan kecepatan transisi individu dari populasi rentan ke divaksinasi dapat dilihat pada gambar 2. Sedangkan Kehilangan kekebalan (ω) menentukan jumlah individu divaksinasi yang kembali ke status rentan dapat dilihat pada gambar 3.

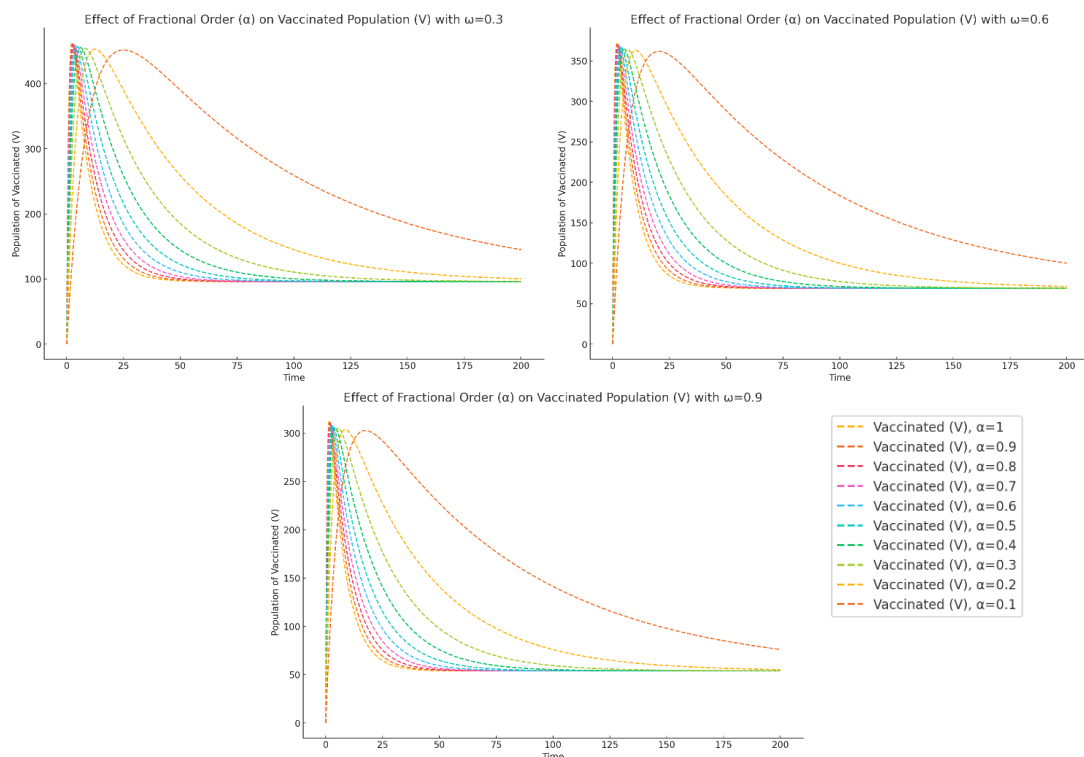


Gambar 2. Pengaruh *fractional order* terhadap populasi vaksin dengan $v = 0.3; 0.6; 0.9$

Laju vaksinasi tinggi ($v = 0.9$): populasi divaksinasi (V) meningkat dengan cepat pada laju vaksinasi tinggi, mencapai titik jenuh lebih awal untuk nilai *fractional order* besar ($\alpha = 1$). Pada *fractional order* kecil ($0.1 \leq \alpha \leq 0.4$), peningkatan populasi V tetap terjadi tetapi membutuhkan waktu lebih lama untuk mencapai cakupan maksimal karena efek memori menghambat transisi dari populasi rentan. Laju vaksinasi rendah ($v = 0.3$): pada laju vaksinasi rendah, peningkatan populasi V berjalan lambat, terutama pada *fractional order* kecil ($\alpha < 0.5$). Ini menunjukkan bahwa cakupan vaksinasi tidak dapat tercapai dengan cepat, meninggalkan

populasi rentan dalam jumlah besar. Efek *Fractional Order* (α): *Fractional order* besar ($0.8 \leq \alpha \leq 1$) menghasilkan peningkatan populasi V yang signifikan dalam waktu yang relatif singkat. Sebaliknya, pada *fractional order* kecil, peningkatan V menjadi lebih bertahap, mencerminkan tantangan dalam mencapai cakupan vaksinasi optimal dalam model dengan efek memori.

Efek kehilangan kekebalan (ω): pada $\omega = 0.3$, populasi V meningkat dengan cepat dan tetap stabil untuk waktu yang lebih lama. Kehilangan kekebalan yang rendah memungkinkan cakupan vaksinasi yang tinggi dipertahankan, terutama pada *fractional order* besar ($\alpha = 1$). Pada $\omega = 0.6$, populasi V meningkat lebih lambat dan mulai menurun lebih awal dibandingkan $\omega=0.3$. Penurunan ini lebih tajam untuk *fractional order* kecil ($\alpha < 1$). Pada $\omega = 0.9$, populasi V meningkat tajam pada awal simulasi tetapi kemudian menurun secara signifikan karena kehilangan kekebalan tinggi. Efek ini terlihat lebih jelas pada *fractional order* kecil. Dampak *fractional order* (α): *fractional order* besar ($\alpha = 1$) menghasilkan peningkatan populasi V yang signifikan dan stabilitas yang lebih baik, meskipun ada kehilangan kekebalan. *fractional order* kecil ($\alpha < 1$) memperlambat peningkatan populasi V dan menyebabkan cakupan vaksinasi lebih sulit dipertahankan pada nilai ω yang tinggi.



Gambar 3. Pengaruh *fractional order* terhadap populasi vaksin dengan $\omega = 0.3; 0.6; 0.9$

4. KESIMPULAN

Penelitian ini mengembangkan model matematika berbasis *fractional-order* untuk menganalisis dinamika penyakit kolera dengan mempertimbangkan pengaruh vaksinasi. Model yang dikembangkan memperluas pendekatan klasik dengan menambahkan kompartemen vaksinasi dan menggunakan *fractional-order derivatives* untuk menangkap efek memori dalam dinamika penyakit. Pendekatan ini memberikan fleksibilitas yang lebih besar dalam menggambarkan dinamika epidemiologis yang kompleks. Simulasi numerik mengungkapkan bahwa peningkatan laju vaksinasi dan nilai *fractional order* (α) secara signifikan meningkatkan cakupan vaksinasi dan menurunkan risiko penyebaran penyakit. Namun, kehilangan kekebalan yang tinggi dapat menghambat stabilitas jangka panjang cakupan vaksinasi, terutama pada nilai *fractional order* kecil.

DAFTAR PUSTAKA

- Brhane, K. W., Ahmad, A. G., Hina, H., & Emadifar, H. (2024). Mathematical modeling of cholera dynamics with intrinsic growth considering constant interventions. *Scientific Reports*, 14(1), 4616. <http://dx.doi.org/10.1038/s41598-024-55240-0>
- Cui, X., Xue, D., & Pan, F. (2022). A fractional SVIR-B epidemic model for Cholera with imperfect vaccination and saturated treatment. *The European Physical Journal Plus*, 137(12), 1361. <http://dx.doi.org/10.1140/epjp/s13360-022-03564-z>
- Jackob, O. K., Akinyi, O., & Tireito, F. (2023). A Mathematical Model on the Dynamics of In-Host Infection Cholera Disease with Vaccination. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2023(1), 1465228 <http://dx.doi.org/10.1155/2023/1465228>
- Johnson, C. R., & Horn, R. A. (1985). *Matrix analysis*. Cambridge: Cambridge university press.
- Mukhlis, M., Saumi, F., & Nabilla, U. (2021). Analisis Penyebaran Penyakit Filariasis Menggunakan Model SEIR Di Provinsi Sumatera Utara. *Jurnal Absis: Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika*, 3(2), 267-277.
- Muhseen, A. A., & Zhou, X. (2016). On the Dynamical Behaviors of a Cholera Model with Holling Type II Functional Response. *Al-Nahrain Journal of Science*, 19(1), 156-167.
- Nuha, A. R. (2020). Analisis Model Matematika Penyebaran Penyakit Kolera Dengan Mempertimbangkan Masa Inkubasi. *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*, 17(2), 212-229.
- Oshinubi, K., Peter, O. J., Addai, E., Mwizerwa, E., Babasola, O., Nwabufu, I. V., ... & Agbaje, J. O. (2023). Mathematical modelling of tuberculosis outbreak in an East African country incorporating vaccination and treatment. *Computation*, 11(7), 143. <http://dx.doi.org/10.3390/computation11070143>
- Van den Driessche, P., & Watmough, J. (2002). Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical biosciences*, 180(1-2), 29-48.
- Yaseen, R. M., Ali, N. F., Mohsen, A. A., Khan, A., & Abdeljawad, T. (2024). The modeling and mathematical analysis of the fractional-order of Cholera disease: Dynamical and Simulation. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, 12, 100978. <https://doi.org/10.1016/j.padiff.2024.100978>