SAINTIFIK:
Jurnal Matematika, Sains, dan Pembelajarannya **Vol.11, No.1, Janurai 2025, pp. 134~145**
ISSN 2407-4098 (print) DOI:10.31605/saintifik.v11i1.562
ISSN 2622-8904 (online)

Penerapan Metode Simpleks yang Direvisi dalam Menentukan Solusi Optimum

Agustinus Langowuyo[1*], Abraham[2]
[1,2]Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Cenderawasih, Indonesia
e-mail: agustinus.langowuyo@fmipa.uncen.ac.id

Abstrak

Metode simpleks yang direvisi merupakan prosedur matematika untuk menentukan sulusi optimum dalam masalah program linear. Penentuan solusi optimum dengan menggunakan metode simplkes yang direvisi adalah dengan mengubah masalah dalam bentuk standart, menentukan pecahan dasar awal, menentukan variabel masuk $\boldsymbol{p_j}$ *dengan menghitung* $z_j - c_j = \boldsymbol{y}\boldsymbol{p_j} - c_j$ *, selanjutnya dengan menentukan variabel keluar* $\boldsymbol{p_r}$ *dengan diketahui vektor masuk* $\boldsymbol{p_j}$*. Solusi optimum diperoleh dengan* $x_B = B^{-1}\boldsymbol{b}$ *dan* $z = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{x}_B$ *. Algoritma metode simpleks yang direvisi mengarah pada lebih sedikit perhitungan dari pada algoritma tabel pada metode simpleks biasa.*

Kata kunci*—Program Linear, Metode Simpleks Yang Direvisi. Solusi Optimum*

1. PENDAHULUAN

Program linear adalah suatu optimasi persamaan linear terhadap kendala-kendala linear yang berupa sistem persamaan linear (Sriwidadi & Agustina, 2013; Noerhayati & Suprapto, 2017; Sembiring, 2017; Fikri et al., 2021; Nitiasya & Harahap, 2021). Metode simpleks adalah salah satu metode untuk mencari solusi optimum dalam masalah program linear yaitu dengan memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan dari suatu masalah program linear yang didasarkan pada proses iterasi (Budianti et al., 2020; Asmara et al., 2023). Pada metode simpleks persoalan program linear selalu diubah menjadi persoalan program linear standart, dimana semua batasan diekspresikan sebagai persamaan dengan menambahkan variabel *slack* dan *surplus*.

Terdapat dua jenis metode simpleks, yaitu metode simpleks primal dan metode simpleks dual (Aulia et al., 2013). Metode simpleks primal hanya berkaitan dengan pemecahan dasar yang layak, sedangkan metode simpleks dual menangani pemecahan dasar yang tidak layak sampai iterasi terakhir dimana pemecahan basis tersebut haruslah layak.

Metode simpleks yang direvisi adalah prosedur yang sistematik yang menggunakan langkah-langkah yang tepat sama dari metode simpleks untuk meningkatkan efisiensi dan akurasi perhitungan (Lalang et al., 2021). Dalam metode simpleks yang direvisi, perhitungan disetiap iterasi diperoleh dari inversi B^{-1} dan data awal dari masalah program linear. Selain itu algoritma metode simpleks yang direvisi ini mengarah pada lebih sedikit perhitungan daripada algoritma tabel metode simpleks yang biasa. Berdasarkan uraian yang dijelaskan, maka dapat dirumuskan permasalahan dalam penelitian ini adalah bagaimana penerapan metode simpleks yang direvisi dalam menentukan solusi optimum.

1.1 Matriks

Definisi. (Anton dan Rorres, 2004)

Matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks.

Ukuran suatu matriks dinyatakan dalam jumlah baris (garis horizontal) dan kolom (garis vertikal) yang dimilikinya. Pada penulisan ukuran, bilangan pertama selalu menunjukkan jumlah baris dan bilangan kedua menunjukkan jumlah kolom. Suatu matriks yang hanya terdiri dari satu kolom disebut matriks kolom (atau vektor kolom) dan suatu matriks yang hanya terdiri dari satu baris disebut matriks baris (atau vektor baris). Matriks dinotasikan dengan huruf kapital dan dicetak tebal. Entri yang terletak pada baris i dan kolom j di dalam matriks $\boldsymbol{A}$ akan dinyatakan sebagai a_{ij}.

Bentuk umum matriks yang mempunyai m baris dan n kolom dinyatakan sebagai

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.2 Sistem Persamaan Linear

Definisi (Anton dan Rorres, 2004)

Sejumlah tertentu persamaan linear dalam variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ disebut sistem persamaan linear. Urutan sejumlah bilangan $s_1, s_2, \dots, s_n$ merupakan solusi dari sistem persamaan tersebut jika $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$ merupakan solusi dari persamaan di dalam sistem tersebut.

Suatu sistem yang terdiri dari m persamaan linear dengan n variabel tak diketahui dapat ditulis sebagai:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \tag{1}$$

dimana $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah variabel yang tidak diketahui, a_{ij} dan b_i merupakan konstanta.

Sistem persamaan linear yang terdiri dari m persamaan linear dalam n peubah dapat ditulis dalam bentuk matriks seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

atau dapat dinyatakan secara singkat dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$AX = B$$

dengan A adalah matriks koefisien, X adalah matriks variabel, dan B adalah matriks konstanta.

1.3 Program Linear

Program linear merupakan suatu metode untuk membuat keputusan di antara berbagai alternatif kegiatan pada waktu kegiatan-kegiatan tersebut dibatasi oleh kegiatan-kegiatan tertentu. Keputusan yang akan diambil dinyatakan sebagai fungsi tujuan, sedangkan kendala-kendala yang dihadapi dalam membuat keputusan tersebut dinyatakan dalam bentuk fungsi kendala. Tujuan penyelesaian masalah dengan program linear berkaitan dengan masalah optimalisasi, yaitu tujuan maksimal atau minimal (Rangkuti, 2013).

Terdapat tiga elemen penting dalam program linear yaitu variabel keputusan $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, fungsi tujuan (z), dan pembatas/kendala. Pola umum program linear adalah menentukan variabel keputusan sedemikian hingga memgoptimalkan fungsi tujuan yang memenuhi kendala-kendala. Nilai variabel keputusan yang memenuhi semua kendala-kendala disebut solusi layak, nilai variabel keputusan yang memberikan nilai fungsi tujuan optimum (maksimum atau minimum) dan memenuhi kendala-kendala disebut solusi optimum (Ruminta, 2014).

1.4 Metode Simpleks

Metode simpleks adalah suatu prosedur matematis untuk mencari solusi optimum yaitu memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan dari suatu masalah pemograman linear yang didasarkan pada proses iterasi. Sebelum melakukan proses iterasi, masalah terlebih dahulu dibawa ke bentuk standar metode simpleks. Bentuk standar metode simpleks sebagai berikut:

Maksimum/minimum $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

Kendala:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ dan $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m) \geq 0$
Dalam notasi vektor/matriks, bentuk standar simpleks dapat dinyatakan sebagai berikut:
Maksimum/minimum $z = \boldsymbol{c}\mathbf{x}$
Kendala $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \boldsymbol{b}$
$\mathbf{x} \geq 0, \boldsymbol{b} \geq 0$ dengan

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}; \boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

Untuk mengubah masalah dalam bentuk standar metode simpleks, ada dua hal yang harus diperhatikan.
1. Semua ruas kanan kendala tidak boleh negatif. Apabila ada kendala yang ruas kanannya negatif maka harus diubah dahulu menjadi tak negatif dengan mengalikan kendala tersebut dengan -1.
2. Semua kendala harus berbentuk persamaan. Apabila kendala berbentuk pertidaksamaan maka harus diubah ke bentuk persamaan dengan menambahkan variabel bantuan, yaitu variabel *slack* ke sisi kiri kendala tersebut (untuk $\leq$) atau mengurangkan variabel *surplus* ke sisi kiri kendala tersebut (untuk $\geq$). Koefisien variabel *slack* dan *surplus* dalam fungsi tujuan adalah nol (Siang, 2011).

1.5 Metode Simpleks yang Direvisi

Metode simpleks yang direvisi adalah prosedur yang sistematik yang menggunakan langkah-langkah yang tepat sama dengan metode simpleks untuk meningkatkan efisiensi dan akurasi perhitungan. Dalam metode simpleks yang direvisi masalah program linear diekspresikan dalam bentuk matriks sebagai berikut:
maksimumkan atau minimumkan $z = \boldsymbol{c}\mathbf{x}$
dengan batasan

$$(\boldsymbol{AI})\mathbf{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

dimana,
$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}$ dibedakan menjadi variabel basis dengan $\mathbf{x}_{\boldsymbol{B}}$ dan variabel non basis $\mathbf{x}_{\boldsymbol{N}}$. Selanjutnya $\boldsymbol{c}$ dibedakan menjadi $\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}$ (koefisien $\mathbf{x}_{\boldsymbol{B}}$) dan $\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{N}}$ (koefisien $\mathbf{x}_{\boldsymbol{N}}$) pada persamaan z. Jadi masalah program linear dalam bentuk standar dapat ditulis menjadi:
$z = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{N}}\mathbf{x}_{\boldsymbol{N}} + \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}\mathbf{x}_{\boldsymbol{B}}$
$\boldsymbol{A}\mathbf{x}_{\boldsymbol{N}} + \boldsymbol{B}\mathbf{x}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{b}$
Kemudian dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{N}} & -\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}} \\ 0 & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \mathbf{x}_{\boldsymbol{N}} \\ \mathbf{x}_{\boldsymbol{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Pada awal iterasi $\mathbf{x}_{\boldsymbol{B}}$ mewakili variabel basis yang berkaitan dengan $\boldsymbol{B}$ sebagai basis. Pada awal iterasi $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$ berarti bahwa $\mathbf{x}_{\boldsymbol{B}}$ mewakili m elemen dari $\mathbf{x}$ dan $\boldsymbol{B}$ mewakili $(\boldsymbol{AI})$ yang berkaitan dengan $\mathbf{x}_{\boldsymbol{B}}$. Sehingga (2) menjadi:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{N}} & -\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}} \\ 0 & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \mathbf{x}_{\boldsymbol{N}} \\ \mathbf{x}_{\boldsymbol{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

Karena variabel non basis bernilai nol maka pemecahan optimal ditentukan oleh variabel basis, sehingga diperoleh

$$z = \boldsymbol{c_N}\mathbf{x}_{\boldsymbol{N}} + \boldsymbol{c_B}\mathbf{x}_{\boldsymbol{B}} \rightarrow z = \boldsymbol{c_B}\mathbf{x}_{\boldsymbol{B}}$$
$$\boldsymbol{A}\mathbf{x}_{\boldsymbol{N}} + \boldsymbol{B}\mathbf{x}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{b} \rightarrow \boldsymbol{B}\mathbf{x}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{b}$$

dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c_B} \\ 0 & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \mathbf{x}_{\boldsymbol{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan nilai $\mathbf{x}_{\boldsymbol{B}}$ dan z, mengalikan kedua ruas dengan invers dari $\begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c_B} \\ 0 & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$, sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} z \\ \mathbf{x}_{\boldsymbol{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

Tabel simpleks dalam bentuk umum yang bersesuaian dengan $\mathbf{x}_{\boldsymbol{B}}$ diperoleh dengan:

$$\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1} \\ 0 & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c_N} & -\boldsymbol{c_B} \\ 0 & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \mathbf{x}_{\boldsymbol{N}} \\ \mathbf{x}_{\boldsymbol{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1} \\ 0 & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c_N} & \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{c_B} \\ 0 & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \mathbf{x}_{\boldsymbol{N}} \\ \mathbf{x}_{\boldsymbol{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

Jadi dalam bentuk matriks tabel simpleks ditunjukkan dalam Tabel 1 berikut:

Tabel 1. Tabel simpleks dalam bentuk Matriks

Dasar	x_N	x_B	
z	$c_B B^{-1} A - c_N$	$c_B B^{-1} I - c_B$	$c_B B^{-1} b$
x_B	$B^{-1} A$	$B^{-1} I$	$B^{-1} b$

2. METODE PENILITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini merupakan penelitian kuantitatif dengan pendekatan studi kepustakaan/litelatur dengan mempelajari beberapa referensi yan memuat materi yang berkaitan dengan masalah yang dibahas dalam bidang aljabar. Dengan lokasi penelitian berada di Kota Jayapura.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Langkah-Langkah Penentuan Solusi Optimum Program Linear dengan Metode Simpleks Primal yang Direvisi

Berikut ini akan dijelaskan langkah-langkah penentuan solusi optimum program linear dengan metode simpleks primal yang direvisi, antara lain:

1. Mengubah masalah program linear dalam bentuk standar, sebagai berikut:
   Memaksimumkan
   Fungsi tujuan: $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$
   dengan kendala:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$

2. Menentukan pemecahan dasar awal yang layak, dengan diketahui basis awal $\boldsymbol{I}$ (matriks identitas), $\boldsymbol{x}_B$ (variabel basis), $\boldsymbol{c_B}$ (koefisien $\boldsymbol{x}_B$).

Tabel 2. Tabel Metode Simpleks yang Direvisi

Dasar	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	...	$\boldsymbol{x_j}$	...	$\boldsymbol{x_n}$	Pemecahan
$\boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{z_1 - c_1}$	$\boldsymbol{z_2 - c_2}$	...	$\boldsymbol{z_j - c_j}$	...	$\boldsymbol{z_n - c_n}$	
$\boldsymbol{x_B}$	$\boldsymbol{B^{-1}p_j}$						$\boldsymbol{B^{-1}b}$

Lakukan berulang kali langkah 2 untuk mendapatkan solusi optimum.

3.2 Langkah-Langkah Penentuan Solusi Optimum Program Linear dengan Metode Simpleks Dual yang Direvisi

Berikut ini akan dijelaskan langkah-langkah penentuan solusi optimum program linear dengan metode simpleks dual yang direvisi, antara lain:

1. Mengubah masalah program linear minimum ke bentuk program linear maksimum.
   Minimumkan
   Fungsi tujuan: $w = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$
   dengan kendala:
   $$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1$$
   $$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2$$
   $$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
   $$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

   $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$

   Maksimumkan
   Fungsi tujuan: $z = -\,w$
   dengan kendala:
   $$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
   $$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2$$
   $$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
   $$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

   $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$

2. Mengubah masalah program linear dalam bentuk standar, sebagai berikut:
   Memaksimumkan
   Fungsi tujuan: $z = -\,w$
   dengan kendala:
   $$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
   $$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
   $$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
   $$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

   $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$

3. Diselesaikan menggunakan langkah-langkah metode simpleks dual yang direvisi, sebagai berikut:
   a. Menentukan Variabel Masuk $\boldsymbol{p}_j$.
   Menghitung $z_j - c_j$ untuk setiap vektor non basis $\boldsymbol{p}_j$.

$z_j - c_j = \boldsymbol{y}\boldsymbol{p}_j - c_j, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}_B B^{-1}$
variabel masuk $\boldsymbol{p}_j$ dipilih yang memiliki $z_j - c_j$ paling kecil. Jika $z_j - c_j \leq 0$, maka pemecahan optimum telah dicapai.
Pemecahan optimum dicapai dengan
$\boldsymbol{x}_B = B^{-1}\boldsymbol{b}$ dan $z = \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{x}_B$

b. Menentukan Variabel Keluar $\boldsymbol{p}_r$ dengan diketahui vektor masuk $\boldsymbol{p}_j$.
Menghitung nilai variabel basis yaitu:

$$\boldsymbol{x}_B = B^{-1}\boldsymbol{b}$$

Menentukan koefisien batasan dari variabel masuk yaitu:

$$\boldsymbol{\alpha}^j = B^{-1}\boldsymbol{p}_j$$

Variabel keluar $\boldsymbol{p}_r$ berkaitan dengan

$$\theta = \max\left\{\frac{(B^{-1}\boldsymbol{b})_k}{\boldsymbol{\alpha}^j{}_k}, \boldsymbol{\alpha}^j{}_k > 0\right\}$$

4. Menentukan basis berikutnya B_{next}^{-1} dengan diketahui basis invers saat ini adalah B^{-1}.

$$B_{next}^{-1} = \boldsymbol{E}B^{-1}$$

Untuk mendapatkan solusi optimun, lakukan berulang kali langkah 3

- *Studi Kasus 1.*

Suatu perusahaan mebel ingin membuat dua jenis meja, yaitu meja tulis jenis A dan meja tulis jenis B. Proses produksi meliputi tiga tahapan pekerjaan, yaitu tahap persiapan, pemasangan, dan pengecatan. Untuk membuat 1 meja jenis A diperlukan waktu persiapan 2 jam, pemasangan 1 jam, dan pengecatan 1 jam. Sedangkan untuk membuat 1 meja jenis B diperlukan waktu persiapan 1 jam, pemasangan 2 jam, dan pengecatan 1 jam. Waktu yang ada (1 bulan) untuk masing-masing tahap pekerjaan adalah untuk tahap persiapan 180 jam, tahap pemasangan 160 jam, tahap pengecatan 100 jam. Keuntungan yang diperoleh dari penjualan 1 meja jenis A adalah Rp6.000.000,00 dan untuk 1 meja jenis B adalah Rp4.000.000,00.

Berapa produksi meja optimum bulanan pada perusahaan mebel tersebut agar keuntungan yang diperoleh sebesar-besarnya?

Solusi:
Berdasarkan pertanyaan pada kasus di atas yaitu keuntungan sebesar-besarnya yang diperoleh perusahaan maka persoalan program linear di atas merupakan persoalan maksimum.
Misalkan $x_1 =$ meja jenis A
$x_2 =$ meja jenis B
Fungsi Tujuan : $z = 6.000.000\ x_1 + 4.000.000 x_2$
Dan kendala yang harus dipenuhi

$2x_1 + x_2 \leq 180$	(Persiapan)	(3)
$x_1 + 2x_2 \leq 160$	(Pemasangan)	(4)
$x_1 + x_2 \leq 100$	(Pengecatan)	(5)

$x_1, x_2 \geq 0$

Setelah dibentuk dalam model program linear, permasalahan dapat diselesaikan menggunakan langkah-langkah metode simpleks yang direvisi,

Langkah pertama, mengubah masalah program linear dalam bentuk standar.
Untuk mengubah masalah program linear dalam bentuk standar maka semua kendala harus berbentuk persamaan dengan menambahkan variabel *slack* pada sisi kiri Pertidaksamaan (3), (4), dan (5).

Fungsi Tujuan: $z = 6.000.000\ x_1 + 4.000.000 x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$
Kendala:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 180 \\
x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & = & 160 \\
x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 100
\end{array}
$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$
$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^{\boldsymbol{T}}$

$\boldsymbol{c} = [6.000.000, 4.000.000, 0, 0, 0]$
$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 180 \\ 160 \\ 100 \end{bmatrix}$

Langkah kedua, menentukan pemecahan dasar awal yang layak, dengan diketahui basis awal $\boldsymbol{I}$ (matriks identitas), $\boldsymbol{x}_B$ (variabel basis), $\boldsymbol{c}_B$ (koefisien $\boldsymbol{x}_B$).
Misalkan $x_1, x_2, x_3 = 0,\ x_3 = 180, x_4 = 160, x_5 = 100$ pemecahan dasar ini layak tetapi belum optimum maka diselesaikan menggunakan metode simpleks primal.
Pemecahan awal

$$\boldsymbol{x}_B = [x_3, x_4, x_5]^{\boldsymbol{T}}$$
$$\boldsymbol{c}_B = [0,0,0]$$
$$B = [\boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4, \boldsymbol{p}_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}$$
$$B^{-1} = \boldsymbol{I}$$

Setelah menentukan pemecahan awal, maka diselesaikan menggunakan langkah-langkah metode simpleks primal yang direvisi, sebagai berikut:

Iterasi Pertama

a. Menentukan Variabel Masuk $\boldsymbol{p}_j$

Menghitung $z_j - c_j$ untuk setiap vektor non basis $\boldsymbol{p}_1$ dan $\boldsymbol{p}_2$.

$\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}_B B^{-1} = \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{I} = \boldsymbol{c}_B = [0,0,0]$

$$
\begin{aligned}
[z_1 - c_1, z_2 - c_2] &= \boldsymbol{y}[\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2] - [\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2] \\
&= [0,0,0] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - [6.000.000, 4.000.000] \\
&= [0,0] - [6.000.000, 4.000.000] \\
&= [-6.000.000, -4.000.000]
\end{aligned}
$$

Dalam bentuk tabel simpleks dapat dituliskan sebagai berikut:

Tabel 3. Iterasi Pertama Bagian a Kasus 1

Dasar	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Pemecahan
z	$-6.000.000$	$-4.000.000$	0	0	0	0

Kasus ini merupakan masalah maksimasi, maka variabel masuk $\boldsymbol{p}_j$ dipilih yang memiliki $z_j - c_j$ paling kecil yaitu $-6.000.000$. Jadi $\boldsymbol{p}_1$ merupakan vektor masuk.

b. Menentukan variabel keluar dengan diketahui $\boldsymbol{p}_1$ memasuki basis

$$\boldsymbol{x}_B = B^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 180 \\ 160 \\ 100 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\alpha}^1 = B^{-1}\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{I}\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dalam bentuk tabel simpleks dapat dituliskan sebagai berikut

Tabel 4. Iterasi Pertama Bagian b Kasus 1

Dasar	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Pemecahan
z	$-6.000.000$	$-4.000.000$	0	0	0	0
x_3	2					180
x_4	1					160
x_5	1					100

Variabel keluar $\boldsymbol{p}_r$ berkaitan dengan

$$\theta = \min\left\{\frac{180}{2}, \frac{160}{1}, \frac{100}{1}\right\}$$
$$= \min\{90, 160, 100\}$$
$$= 90 \text{ bersesuaian dengan } x_3$$

Jadi, $\boldsymbol{p}_3$ adalah vektor keluar.

c. Menentukan basis berikutnya B_{next}^{-1} dengan diketahui basis invers saat ini adalah B^{-1}

$$\xi = \begin{bmatrix} +1/\alpha_3^1 \\ -\alpha_4^1/\alpha_3^1 \\ -\alpha_5^1/\alpha_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E} = [\xi, e_4, e_5] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{next}^{-1} = \boldsymbol{E}B^{-1} = \boldsymbol{EI} = \boldsymbol{E}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Karena $\boldsymbol{p}_1$ menggantikan $\boldsymbol{p}_3$ maka basis baru yang berkaitan dengan vektor basis adalah

$$\boldsymbol{x}_B = [x_1, x_4, x_5]^{\boldsymbol{T}}$$
$$\boldsymbol{c}_B = [6.000.000, 0, 0]$$

Proses iterasi dilanjutkan hingga iterasi ke-3 yang ditampilkan pada tabel berikut :

Tabel 5. Iterasi Ketiga Bagian a Kasus 1

Dasar	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Pemecahan
z	0	0	2.000.000	0	2.000.000	0

Semua $z_j - c_j \geq 0$, solusi optimum dicapai.

Solusi Optimum

$$\boldsymbol{x}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 180 \\ 160 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$z = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{x}_B = [6.000.000, 0, 4.000.000] \begin{bmatrix} 80 \\ 40 \\ 20 \end{bmatrix} = 560.000.000$$

Jadi, produksi meja optimum bulanan pada perusahaan mebel tersebut agar keuntungan yang diperoleh sebesar-besarnya adalah 80 meja jenis A dan 20 meja jenis B, dengan keuntungan sebesar Rp 560.000.000,00 per bulan.

- *Studi Kasus 2*

Tentukan solusi dari persoalan pemograman linear berikut.
Memaksimumkan Fungsi Tujuan: $z = -x_1 - x_2 + 4x_3$
Dan kendala yang harus dipenuhi
$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 9$ (6)
$x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$ (7)
$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$ (8)
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Penyelesaian:
Langkah pertama, mengubah masalah program linear dalam bentuk standar
Untuk mengubah masalah program linear dalam bentuk standar maka semua kendala harus berbentuk persamaan dengan menambahkan variabel *slack* pada sisi kiri Pertidaksamaan
Fungsi Tujuan: $z = -x_1 - x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$
Kendala:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & & & = & 9 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & + & x_5 & & & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 4 \end{array}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$
$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2 x_3, x_4, x_5, x_6)^{\boldsymbol{T}}$
$\boldsymbol{c} = (-1, -1, 4, 0, 0, 0)$
$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

Langkah kedua, menentukan pemecahan dasar awal yang layak, dengan diketahui basis awal $\boldsymbol{I}$ (matriks identitas), $\boldsymbol{x}_B$ (variabel basis), $\boldsymbol{c}_B$ (koefisien $\boldsymbol{x}_B$).
Misalkan $x_1, x_2, x_3 = 0$, $x_4 = 9, x_5 = 2, x_6 = 4$ pemecahan dasar ini layak, diselesaikan menggunakan metode simpleks primal.
Pemecahan awal

$$\boldsymbol{x}_B = [x_4, x_5, x_6]^{\boldsymbol{T}}$$
$$\boldsymbol{c}_B = [0,0,0]$$
$$B = [\boldsymbol{p}_4, \boldsymbol{p}_5, \boldsymbol{p}_6] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}$$
$$B^{-1} = \boldsymbol{I}$$

Setelah menentukan pemecahan awal, maka diselesaikan menggunakan langkah-langkah metode simpleks primal yang direvisi, sebagai berikut:

Iterasi Pertama

a. Menentukan Variabel Masuk $\boldsymbol{p}_j$

Menghitung $z_j - c_j$ untuk setiap vektor non basis $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2,$ dan $\boldsymbol{p}_3$.
$\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$ dan $\boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}_B B^{-1} = \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{I} = \boldsymbol{c}_B = [0,0,0]$
$[z_1 - c_1, z_2 - c_2, z_3 - c_3] = \boldsymbol{y}[\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3] - [\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3]$

$$= [0,0,0]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - [-1,-1,4]$$
$$= [0,0,0] - [-1,-1,4]$$
$$= [1,1,-4]$$

Dalam bentuk tabel simpleks dapat dituliskan sebagai berikut:

Tabel 6. Iterasi Pertama Bagian a Kasus 2

Dasar	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Pemecahan
z	1	1	-4	0	0	0	0

Kasus ini merupakan masalah maksimasi, maka variabel masuk $\boldsymbol{p}_j$ dipilih yang memiliki $z_j - c_j$ paling kecil yaitu -4. Jadi $\boldsymbol{p}_3$ merupakan vektor masuk.

b. Menentukan variabel keluar dengan diketahui $\boldsymbol{p}_3$ memasuki basis

$$\boldsymbol{x}_B = B^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Ib} = \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^3 = B^{-1}\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{Ip}_3 = \boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dalam bentuk tabel simpleks dapat dituliskan sebagai berikut:

Tabel 7. Iterasi Pertama Bagian b Kasus 2

Dasar	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_5	Pemecahan
z	1	1	-4	0	0	0	0
x_4			2				9
x_5			-1				2
x_6			1				4

Variabel keluar $\boldsymbol{p}_r$ berkaitan dengan

$$\theta = \min\left\{\frac{9}{2}, \frac{2}{-1}, \frac{4}{1}\right\}$$
$$= \min\{4.5, -2, 4\}$$
$$= 4 \text{ bersesuaian dengan } x_6$$

Jadi, $\boldsymbol{p}_6$ adalah vektor keluar.

c. Menentukan basis berikutnya B_{next}^{-1} dengan diketahui basis invers saat ini adalah B^{-1}

$$\xi = \begin{bmatrix} -\alpha_4^3/\alpha_6^3 \\ -\alpha_5^3/\alpha_6^3 \\ 1/\alpha_6^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/1 \\ -(-1)/1 \\ +1/1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E} = [e_4, e_5, \xi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{next}^{-1} = \boldsymbol{E}B^{-1} = \boldsymbol{EI} = \boldsymbol{E}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Karena $\boldsymbol{p}_3$ menggantikan $\boldsymbol{p}_6$ maka basis baru yang berkaitan dengan vektor basis adalah

$$\boldsymbol{x}_B = [x_4, x_5, x_3]^{\boldsymbol{T}}$$
$$\boldsymbol{c}_B = [0, 0, 4]$$

Proses dilanjutkan hingga diperoleh solusi optimum pada itarasi ke-3, yang ditampilkan pada tabel berikut :

Tabel 8. Iterasi Ketiga Bagian a Kasus 2

Dasar	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Pemecahan
z	0	4	0	1	0	2	0

Semua $z_j - c_j \geq 0$, solusi optimum dicapai.

Solusi Optimum

$$\boldsymbol{x}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 6 \\ \frac{13}{3} \end{bmatrix}$$

$$z = \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{x}_B = [-1, 0, 4] \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 6 \\ \frac{13}{3} \end{bmatrix} = 17$$

Jadi solusi optimum diperoleh $z = 17$ dengan $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 0$, dan $x_3 = \frac{13}{3}$

4. KESIMPULAN

Penentuan solusi optimum program linear dengan metode simpleks yang direvisi adalah mengubah masalah dalam bentuk standar, menentukan pemecahan dasar awal, menentukan variabel masuk $\boldsymbol{p}_j$ dengan menghitung $z_j - c_j = \boldsymbol{y}\boldsymbol{p}_j - c_j$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}_B B^{-1}$, menentukan variabel keluar $\boldsymbol{p}_r$ dengan diketahui vektor masuk $\boldsymbol{p}_j$, dan menentukan basis berikutnya B_{next}^{-1}. Solusi optimum dicapai dengan $\boldsymbol{x}_B = B^{-1}\boldsymbol{b}$ dan $z = \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{x}_B$.

Perhitungan disetiap iterasi metode simpleks yang direvisi diperoleh dari inversi basis B^{-1} dan data awal dari masalah program linear. Algoritma metode simpleks yang direvisi ini mengarah pada lebih sedikit perhitungan (tidak perlu menghitung semua entri dari tabel simpleks) daripada algoritma tabel metode simpleks yang biasa.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H., dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi*. Jakarta: Erlangga.

Asmara, T., Rahmawati, M., Aprilla, M., Harahap, E., & Darmawan, D. (2023). Strategi pembelajaran pemrograman linier menggunakan Metode Grafik dan Simpleks. *Jurnal Teknologi Pendidikan dan Pembelajaran*, *8*(1), 506-514.

Aulia, M. R., Putra, D. N., Murniati, S., Mustahiroh, M., Octavia, D., & Budiasih, Y. (2013). Maksimalisasi Keuntungan Dengan Pendekatan Metode Simpleks Studi Kasus pada Pabrik Sendai X di Ciputat, Tangerang Selatan. *Liquidity: Jurnal Riset Akuntansi dan Manajemen*, *2*(2), 144-150.

Budianti, R. S., Nurrahman, A. A., Afriyadi, H., Ahmadi, D., & Harahap, E. (2020). Penggunaan Metode Simpleks Untuk Memaksimalkan Target Sales Pada Penjualan Paket Internet. *Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika (JRAM)*, *4*(2), 108-114.

Fikri, A. J., Aini, S., Sukandar, R. S., Safiyanah, I., & Listiasari, D. (2021). Optimalisasi Keuntungan Produksi Makanan Menggunakan Pemrograman Linier Melalui Metode Simpleks. *Jurnal Bayesian: Jurnal Ilmiah Statistika dan Ekonometrika*, *1*(1), 1-16.

Lalang, D., Sya'ban, S. N. A., & Penpada, D. S. (2021). the PENGGUNAAN METODE SIMPELKS DALAM MENGOPTIMALKAN PENDAPATAN PADA PENJUALAN MAKANAN DI RUMAH MAKAN DINDA BATUNIRWALA KECAMATAN TELUK MUTIARA. EduMatSains: Jurnal Pendidikan. *Matematika dan Sains*, *5*(2), 263-278.

Nitiasya, G., & Harahap, E. (2021). Optimasi Laba Produksi Olahan Singkong Menggunakan Program Linier. *Matematika: Jurnal Teori dan Terapan Matematika*, *20*(2), 61-68.

Noerhayati, E. N., & Suprapto, B. S. (2017). Peningkatan Keuntungan Melalui Optimasi Sistem Pemberian Air Daerah Irigasi Molek Dengan Program Linier. *Jurnal Teknika*, *9*(1), 13-Halaman.

Rangkuti, A. 2013. *7 Model Riset Operasi dan Aplikasinya.* Surabaya: Brilian Internasional.

Ruminta. 2014. *Matriks Persamaan Linear dan Pemrograman Linear (Edisi Revisi)*. Bandung: Rekayasa Sains.

Sembiring, Z. (2017). Fuzzy Linier Programming untuk Pemilihan Jenis Kendaraan dalam Mengantisipasi Kemacetan Lalu Lintas di Kota Medan. *Jurnal Teknovasi: Jurnal Teknik dan Inovasi Mesin Otomotif, Komputer, Industri dan Elektronika*, *4*(1), 59-69.

Siang, J. J. 2011. *Riset Operasi dalam Pendekatan Algoritmis.* Yokyakarta: Andi Offset.

Sriwidadi, T., & Agustina, E. (2013). Analisis optimalisasi produksi dengan linear programming melalui metode simpleks. *Binus Business Review*, *4*(2), 725-741.