**SAINTIFIK:**
**Jurnal Matematika, Sains, dan Pembelajarannya** **Vol.10, No.2, Juli 2024, pp. 191~201**
ISSN 2407-4098 (print) DOI:10.31605/saintifik.v10i2.514
ISSN 2622-8904 (online)

# Aplikasi Aljabar Max Plus pada Pengaturan Lampu Lalu Lintas di Perempatan Kasihan Yogyakarta

**Eka Susilowati**
Universitas Nahdlatul Ulama Al Ghazali Cilacap
e-mail: eka250@gmail.com

***Abstrak***

*Aplikasi penggunaan Aljabar max plus dapat digunakan dalam berbagai permasalahan sehari hari. Pada penelitian ini, dibahas mengenai aplikasi aljabar maks plus dalam masalah system antrian lampu lalu lintas. Hal ini sangat penting karena dapat mengurangi antrian kendaraan yang mengakibatkan macet lalu lintas. Tujuan penelitian ini adalah menerapkan aljabar maks plus dalam mengatur lama waktu lampu lalu lintas di Perempatan kasihan Yogyakarta. Data yang dipakai dalam penelitian ini adalah data berupa lama waktu lampu lalu lintas. Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah penggambaran graf kondidi perempatan kasihan dan menggambarkan arah dari system gerak setiap jalur.Kemudian disusun atruran sinkronisasi yang disesuaikan dengan graf tadi sehingga didapat model aljabar maks plus. Berdasarkan pemodelan aljabar maks plus tadi, didapat pengaturan lampu lalu lintas dan lama periodic yang didasarkan pada vector eigen dan nilai eigen. Hasil penelitian ini adalah karena diperoleh nilai eigen 106,25, maka dapat digambarkan keperiodikan nyala lampu lalu lintas. Selain itu, diperoleh juga vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen 106,25 yaitu $(438{,}75\ 437{,}5\ 431{,}25\ 425)^T$ yang mendasari fase nyala lampu lalu lintas di setiap perempatan jalannya.*

***Kata Kunci****— Aljabar max plus, lalu lintas, antrian, nilai eigen, vector eigen*

## 1. PENDAHULUAN

Dengan berkembangnya suatu daerah, biasanya dapat dilihat dari perkembangan sistem transportasi, jaringan telekomunikasi, sistem lalu lintas yang lebih tertata, serta adanya perkembangan daerah pemukinan masyarakat yang menimbulkan kepadatan penduduk. Sebenarnya kepadatan penduduk ini juga berkaitan dengan adanya perkembangan sarana transportasi dan sistem lalu lintas yang ada dalam daerah tersenut. Hal ini dikarenakan banyaknya masyarakat yang menggunakan transportasi pribadi. Dengan demikian berakibat padatnya jalan raya dan kemacetan lalu lintas.

Yogyakarta merupakan kota yang termasuk padat lalu lintas. Hal ini dikarenakan banyaknya pendatang yang terdiri dari wisatawan dan pelajar yang menuntut ilmu di yogyakarta. Kemacetan lalu lintas pun tidak terhindarkan karena hal tersebut. Salah satu usaha untuk mengurangi terjadinya konflik di persimpangan jalan adalah dengan dipasang lampu lalu lintas (traffic light) (Watiy *et al.*, 2023). Pengaturan lalu lintas ini dilakukan agar tidak terjadi kekacauan jalan raya akibat saling berebut jalan. Akan tetapi masih banyak ditemui area lampu lintas yang pengaturannya masih menimbulkan kemacetan panjang. Hal ini biasanya terjadi pada saat jam jam berangkat kantor atau sekolah serta jam jam dimana banyak yang pulang kerja atau sekolah. Ketidaknyamanan para pengendara pun tidak dapat dihindarkan. Dengan masalah tersebut muncul antrian kendaraan yang menumpuk di lampu lalu lintas. Bagi pengendara yang tidak sabar, banyak yang akhirnya melanggar aturan seperti berhenti lewat marka jalan dan sedikit mendahului lampu hijau. Sebenarnya, hal tersebut sangat membahayakan pengendara itu sendiri. Oleh karena itu, dibutuhkan pengaturan sistem lalu lintas khususnya di perempatan yang sering menimbulkan kemacetan antruian kendaraan.

Aljabar maks plus merupakan salah satu struktur khusus dalam aljabar. Aljabar maks plus merupakan semifield atas himpunan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dengan $\mathbb{R}$ merupakan himpunan bilangan real yang dilengkapi oleh operasi maksimum dengan notasi $\oplus$ dan operasi penjumlahan yang dimotasikan $\otimes$. Bentuk umum system persamaan linear aljabar maks plus adalah $A\otimes x=b$ . Sistem persamaan linear $A\otimes x=b$ ini dapat dijadikan salah satu cara untuk permasalah aljabar terapan. Permasalahan yang dapat diselesaikan dengan persamaan linear $A\otimes x=b$ adalah salah satunya pengaturan lampu lalu lintas. Penelitian yang mengangkat materi tentang aljabar maks plus sudah banyak dilakukan. Seperti penelitian yang diteliti oleh (Susilowati, 2018; Susilowati, 2023) mengenai penerapan aljabar max plus untuk pemecahan masalah ground handling dan mencari rute terpendek suatu rute angkot. Sebenarnya, penelitian lain mengenai pengaturan lampu lalu lintas dengan menggunakan nilai eigen dan vector eigen matriks atas aljabar maks plus sudah banyak yang meneliti. Salah satu penelitian (Cesari & Rudhito, 2016). meneliti tentang bagaimana menggunakan aljabar max- plus sehingga dapat mengatur durasi lampu lalu lintas. Selanjutnya, terdapat penelitian lain tentang bagaimana menganalisa lamanya waktu nyala lampu lalu lintas pada suatu persimpangan yang saling berdekatan dengan menggunakan pengaplikasian matriks atas aljabar max-plus (Watiy *et al.*, 2023). Penelitian mengenai pengaturan lalu lintas sebenarnya termotivasi dari penelitian aljabar maks plus pada system antrian seperti penelitian yang dilakukan oleh (Subiono, 2009; Wibowo *et al.*, 2018; Osniman & Marcellinus, 2019). Berdasarkan hal tersebut, akan dikaji lebih dalam mengenai penerapan system persamaan linear aljabar maks plus pada system antrian lampu lalu lintas terutama pada pengaturan waktu lampu lalu lintas. Aljabar maks plus memang dapat digunakan untuk membuat model dan analisis jaringan seperti system antrian. Dalam penelitian ini, dikaji penggunaan model dalam aljabar maks plus untuk mengatur lampu lalu lintas perempatan Kasihan Yogyakarta.

Untuk mengerucutkan penelitian ini, dilakukan pembatasan masalah yaitu diasumsikan kondisi lalu lintas pada saat sibuk di pagi jam 06.30 -08.30 WIB dan pada saat sibuk di sore hari yaitu jam 16.00 – 18.00 WIB pada hari kerja dan bukan tanggal merah. Hal tersebut karena pada jam tersebut biasanya terjadi kemacetan lalu lintas.Tujuan penelitian ini adalah untuk mengatasi kemacetan lalu lintas dengan melakukan pengaturan durasi lampu lintas menggunakan aljabar maks plus di perempatan Kasihan Yogyakarta.

## 2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan bentuk penerapan dari aljabar maks plus ke dalam masalah sistem antrian lampu lalu lintas. Obyek penelitian yang dipilih dalam penelitian ini adalah perempatan Kasiha Yogyakarta. Pemilihan obyek ini dikarenakan perempatan ini merupakan jalan sibuk yang menyebabkan kemacetan dan ada ruas jalan yang kecil. Karena ada ruas jalan yang kecil di perempatan Kasihan ini, menyebabkan antrian kendaraan yang panjang pada saat lampu merah. Data diperoleh dengan melakukan observasi langsung ke lapangan. Pada penelitian ini, awalnya dilakukan dulu analisis data setelah data mentah diperoleh. Tahapan analisis data yang dilakukan diuraikan sebagai berikut :

a. Merepresentasikan sistem lalu lintas pada perempatan Kasihan Yogyakarta. Pertama, digambarkan sistem lampu lalu lintas yang kemudian dikonstruksikan ke bentuk graf yang memaparkan bagaimana keadaan lalu lintas di perempatan tersebut. Selanjutnya ditetapkan aturan arah dari sistem lalu lintas yang berlaku di perempatan tersebut. Setelah jadi graf berarahnya, selanjutnya dibuat model aljabar maks plus dengan menerapkan aturan sinkronisasi pada sistem lalu lintas perempatan Kasihan Yogyakarta.
b. Melakukan konstruksi model yang didasarkan pada aturan aljabar maks plus $x(k+1)=A\otimes x(k)$. Sistem persamaan linear $x(k+1)=A\otimes x(k)$ merupakan aturan aljabar maks plus dalam penerapan pada masalah system antrian dan penjadwalan, dalam penelitian ini kasus system atrian lampu lalu lintas. Sistem tersebut menjadi patokan untuk menyesuaikan model perempatan dan membuat matriks adjesensi yang disesuaikan dengan persaman linear yang didapat.
c. Menghitung nilai eigen dan vector eigen atas matriks aljabar maks plus yang diperoleh dari tahap analisis sebelumnya yang merepresentasikan arus yang ada di system lampu lalu lintas dengan menggunakan program MATLAB.
d. Membandingkan hasil durasi periodic lampu lalu lintas yang lama dengan durasi periodic lampu lalu lintas yang lama. Proses terakhir adalah menganalisis hasil dari system lampu lalu lintas yang baru.

## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbb{R}_{\max}$ dapat diperluas menjadi operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada matriks atas $\mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$.

*Definisi*

Diberikan $\mathbb{R}_{\max}^{n\times n} = \left\{P = \left(P_{ij}\right) \mid \mathrm{P}_{ij} \in \mathbb{R}_{\max}, i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}\right\}$.

a. Diketahui $k \in \mathbb{R}_{\max}$, $P, Q \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$. Didefinisikan $k \otimes P$ adalah matriks yang unsur ke ij nya

$$\left(k \otimes P\right)_{ij} = k \otimes P_{ij} \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$$

Dan $P \oplus Q$ adalah penjumlahan matriks P dan BQyang unsur ke ij nya adalah sebagai berikut

$$\left(P \oplus Q\right)_{ij} = P_{ij} \oplus Q_{ij} \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}.$$

b. Diberikan $P \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times p}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{\max}^{p\times n}$. Didefinisikan $P \otimes Q$ adalah perkalian matriks A dan B sebagai berikut:

$$\left(P \otimes Q\right)_{ij} = \oplus_{i=1}^{p} P_{ik} \otimes Q_{kj} \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$$

Selanjutnya akan dibahas mengenai nilai eigen dan vektor eigen yang digunakan dalam pengaturan lampu lalu lintas secara periodic.

*Definisi*

Diberikan $P \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$, Skalar $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ dikatakan sebagai nilai eigen maks plus dari matriks P jika terdapat suatu vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_{\max}^{n}$ dengan $\mathbf{v} \neq \boldsymbol{\varepsilon}_{n\times 1}$, sedemikian sehingga $P \otimes \mathbf{v} = \lambda \otimes \mathbf{v}$. Vektor $\mathbf{v}$ tersebut dikatakan vector eigen maks plus dari matriks P yang bersesuaian dengan $\lambda$.

Berikut ini diberikan teorema yang mendasari algoritma power:

*Teorema*

Jika keadaan awal $\mathbf{x}(0) \neq \boldsymbol{\varepsilon}$ system persamaan memenuhi $\mathbf{x}(s) = c \otimes \mathbf{x}(t)$ untuk beberapa bilangan bulat s,t dengan $s > t \geq 0$ dan beberapa bilangan real c maka

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x(k)}{k} = \begin{pmatrix}\lambda & \lambda & \ldots & \lambda\end{pmatrix}^{T}$$

Dengan $\lambda = \dfrac{c}{s-t}$ selanjutnya $\lambda$ adalah suatu nilai eigen dari matriks A dengan vector eigen yang diberikan oleh

$$v = \oplus_{i=1}^{s-t}\left(\lambda^{\otimes(s-t-i)} \otimes x\left(t+i-1\right)\right)$$

Apabila didasarkan pada teroma diatas, maka dapat dibentuk algoritma yang dapat dipergunakan untuk memperoleh nilai eigen dan vector eigen dari suatu matriks bujur sangkar yang disebut algoritma power. Dengan algoritma ini, dapat memudahkan dalam menyelesaikan suatu permasalahan yang dimodelkan menggunakan aljabar maks plus.

*Algoritma Power*

*a.* dimulai dengan sebarang vector awal $\mathbf{x}(0) \neq \boldsymbol{\varepsilon}$.

*b.* Iterasi $\mathbf{x}(k+1) = P \otimes \mathbf{x}(k)$ sampai ada bilangan bulat $s > t \geq 0$ dan bilangan riil c sehingga suatu perilaku periodic terjadi , yaitu . $\mathbf{x}(s) = c \otimes \mathbf{x}(t)$.

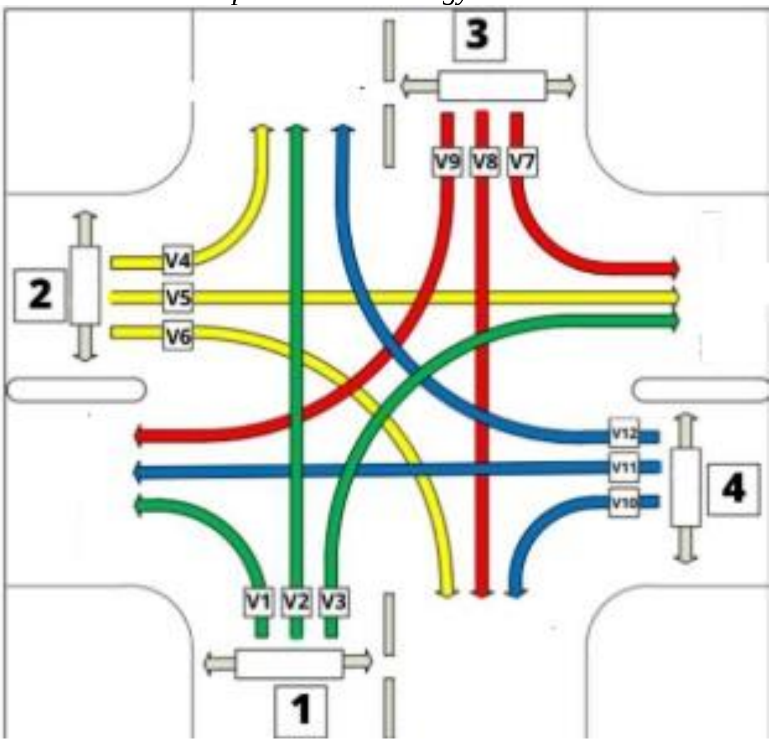
*c.* Mencari nilai $\lambda = \dfrac{c}{s-t}$

*d.* Mencari calon vector eigen dengan $v = \oplus_{i=1}^{s-t} \left( \lambda^{\otimes(s-t-i)} \otimes x(t+i-1) \right)$.

*e.* Selanjutnya tunjukkan $P \otimes \mathbf{v} = \lambda \otimes \mathbf{v}$. Jika v dapat memenuhi persamaan $P \otimes \mathbf{v} = \lambda \otimes \mathbf{v}$ maka v merupakan vector eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda$ dari matriks A dan proses berhenti.

*f.* Jika tidak, maka mulai $\mathbf{x}(k+1) = P \otimes \mathbf{x}(k)$ dengan $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v}$ hingga ditemukan bilangan $r \geq 0$, sedemikian sehingga $\mathbf{x}(r+1) = \lambda \otimes \mathbf{x}(r)$. Dengan demikian, $\mathbf{x}(r)$ menjadi vector eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda$.

*Ilustrasi Sistem Lampu Lalu Lintas Perempatan Kasihan Yogyakarta*

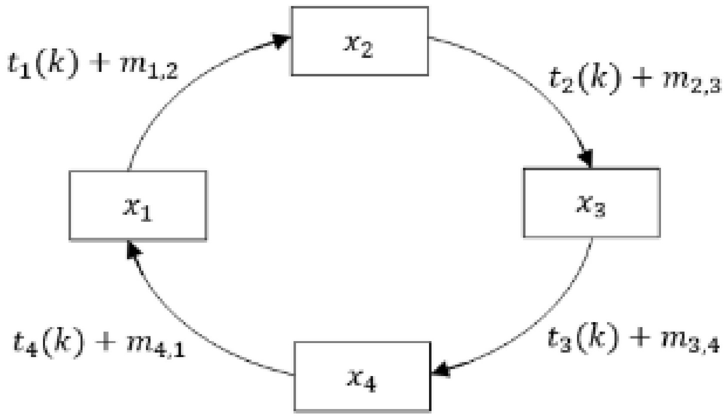



**Gambar 1.** Sistem lampu lalu lintas Perempatan Kasihan Yogyakarta

Jika melihat gambar di atas menggambarkan arus yang terjadi pada perempatan Kasihan Yogyakarta dan peraturan yang diterapkan dalam arus yang bergerak pada perempatan tersebut. Peneliti mengumpulkan data berupa lama waktu lampu hijau, lama waktu lampu kuning, lama waktu lampu merah dan juga selang waktu lampu lalu lintas. Populasi yang diteliti pada penelitian ini adalah lama waktu lalu lintas di perempatan Kasihan Yogyakarta.

| Simpang | Lama Waktu lampu hijau (detik) | Lama Waktu lampu Kuning (detik) | Lama Waktu selang (detik) | Lama Waktu lampu merah (detik) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 5 | 5 | 105 |
| 2 | 22 | 5 | 5 | 100 |
| 3 | 26 | 5 | 5 | 95 |
| 4 | 28 | 5 | 5 | 95 |

Pengambilan data tersebut diperoleh pada tanggal 13 Mei 2024 pukul 07.00 – 08.00 WIB dan 16.00 – 17.00 WIB. Berdasarkan dua waktu tersebut, didapat data yang tidak jauh berbeda dengan data sebelumnya.




**Gambar 2.** Graf Berbobot Sistem Lampu Lalu Lintas Perempatan Kasihan Yogyakarta

Graf berbobot yang diperoleh, menunjukkan bahwa sistem perempatan Kasihan Yogyakarta terhubung kuat karena adanya lintasan pada setiap titik dari fase awal hingga fase akhir pada siklus tersebut. Langkah berikutnya, diberikan aturan sinkronisasi pada sistem lampu lalu lintas yang dirancang dalam graf berbobot bersebut. Sebelumnya didefinisikan terlebih dahulu :

$x_i(k) =$ lama awal lampu merah menyala pada simpang I di fase ke k, $i = 1,2,3,4, k \in \mathbb{N}$

$t_i(k) =$ lama waktu lampu merah pada simpang I di fase ke k, $i = 1,2,3,4, k \in \mathbb{N}$

$m_{i,j} =$ lama waktu selang antara lampu merah simpang I dan awal lampu hijau simpang j, $i, j = 1,2,3,4$ .

Jika disajikan dalam bentuk persamaan matriks, maka model matematika untuk masalah lampu lalu lintas ini adalah sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & t_4(k)+m_{4,1} \\ t_1(k)+m_{1,2} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & t_2(k)+m_{2,3} & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & t_3(k)+m_{3,4} & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \mathbf{x}(k) \oplus \boldsymbol{\varepsilon}$$

Dimana $k = 1,2,3,4$ dengan $x(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) & x_2(k) & x_3(k) & x_4(k) \end{pmatrix}^T$ dan $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}^T$ .

Persamaan matriks tersebut dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\mathbf{x}(k+1) = P \otimes \mathbf{x}(k) \oplus Q$$

Dalam kasus penelitian ini, maka kita dapat peroleh matriks A adalah

$$P = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 120 \\ 105 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 100 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 100 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Nilai eigen dan vektor eigen atas matriks P dapat dicari dengan menggunakan langkah langkah di bawah ini :

1. Mengawali dengan vektor awal sebarang $x(0) \neq \varepsilon$

$$x(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

2. Iterasi $\mathbf{x}(k+1)=P\otimes\mathbf{x}(k)$ hingga ada bilangan bulat $s>t\geq 0$ serta bilangan riil c sedemikian sehingga suatu perilaku periodic terjadi yaitu $x(s)=c\otimes x(t)$,

Pada iterasi pertama

$$x(1)=P\otimes x(0)=\begin{pmatrix}\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 120\\105 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon\\\varepsilon & 100 & \varepsilon & \varepsilon\\\varepsilon & \varepsilon & 100 & \varepsilon\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}120\\105\\100\\100\end{pmatrix}$$

Iterasi kedua dilanjutkan

$$x(2)=P\otimes x(1)=\begin{pmatrix}\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 120\\105 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon\\\varepsilon & 100 & \varepsilon & \varepsilon\\\varepsilon & \varepsilon & 100 & \varepsilon\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}120\\105\\100\\100\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}220\\225\\205\\200\end{pmatrix}$$

Iterasi ketiga masih berlanjut

$$x(3)=P\otimes x(2)=\begin{pmatrix}\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 120\\105 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon\\\varepsilon & 100 & \varepsilon & \varepsilon\\\varepsilon & \varepsilon & 100 & \varepsilon\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}220\\225\\205\\200\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}320\\325\\325\\305\end{pmatrix}$$

Iterasi keempat masih berlanjut

$$x(4)=P\otimes x(3)=\begin{pmatrix}\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 120\\105 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon\\\varepsilon & 100 & \varepsilon & \varepsilon\\\varepsilon & \varepsilon & 100 & \varepsilon\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}320\\325\\325\\305\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}425\\425\\425\\425\end{pmatrix}$$

Berdasarkna proses iterasi yang dilaksanakan, maka diperoleh hasil yang memenuhi algoritma power sebagau berikut :

$$\begin{pmatrix}425\\425\\425\\425\end{pmatrix}=425\otimes\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow x(4)=425\otimes x(0)$$

3. Dengan menggunakan program Matlab maka diperoleh nilai eigennya 106,25 yang sama hasilnya jikan dicari menggunakan

$$\lambda=\frac{c}{s-t}=\frac{425}{4-0}=106,25$$

4. Selanjutnya dicari calon dari vector eigen dengan $v=\oplus_{i=1}^{s-t}\left(\lambda^{\otimes(s-t-i)}\otimes x(t+i-1)\right)$. Jadi vector eigen yang bersesuaian adalah

$$v=\oplus_{i=1}^{4}\left(106,25^{\otimes 4-i}\otimes x(i-1)\right)$$
$$=\left(106,25^{\otimes 3}\otimes x(0)\right)\oplus\left(106,25^{\otimes 2}\otimes x(1)\right)\oplus\left(106,25^{\otimes 1}\otimes x(2)\right)\oplus\left(106,25^{\otimes 0}\otimes x(3)\right)$$
$$=maks\left\{318,75+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},212,5+\begin{pmatrix}120\\105\\100\\100\end{pmatrix},106,25+\begin{pmatrix}220\\225\\225\\200\end{pmatrix},0+\begin{pmatrix}320\\325\\325\\305\end{pmatrix}\right\}$$
$$=\begin{pmatrix}332,5\\331,25\\325\\318,75\end{pmatrix}$$

5. Selanjutnya diselidiki apakah v memenuhi $A\otimes v=\lambda\otimes v$.

$$P\otimes v=\begin{pmatrix}\varepsilon&\varepsilon&\varepsilon&120\\105&\varepsilon&\varepsilon&\varepsilon\\\varepsilon&100&\varepsilon&\varepsilon\\\varepsilon&\varepsilon&100&\varepsilon\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}332,5\\331,25\\325\\318,75\end{pmatrix}$$
$$\lambda\otimes v=106,25\otimes\begin{pmatrix}332,5\\331,25\\325\\318,75\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}438,75\\437,5\\431,25\\425\end{pmatrix}$$

Dengan demikian, vector eigen atas matriks P yang bersesuaian dengan $\lambda=106,25$ adalah $\begin{pmatrix}438,75\\437,5\\431,25\\425\end{pmatrix}$.

Penggunaan vector eigen ini untuk dapat menetapkan kapan waktu awal menyalanya lampu lalu lintas. Awal menyalanya lampu lalu lintas dapat didapatkan dengan cara pengurangan setiap elemen yang ada pada vector eigen dengan elemen pada vector eigen yang paling kecil. Dalam permasalahan ini, elemen vector eigen terkecil adalah 425. Di pihak lain, nilai eigen yang diperoleh dipergunakan untuk menetapkan berapa keperiodikan lamanya nyala lampu lalu lintas baik yang hijau maupun yang merah. Karena diperoleh $\lambda=106,25$, maka diadakan pembulatan keperiodikan lama nyala lampu lalu lintas menjadi $\lambda=106$. Bagaimana pengaturan waktu nyala lampu lalu lintas untuk setiap fase dituliskan pada table di bawah ini dengan waktu awal nyala lampu lalu lintas aliran kendaraan pada fase ke 1 yaitu 0:00:00. Pada table di bawah ini, waktu nyala hijau ditandai dengan warna hijau dan nyala merah ditandai warna merah.

| Simpang | Fase 1 | Fase 2 | Fase 3 | Fase 4 | Fase 5 | dst |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 00:15 | 02:01 | 03:47 | 05:33 | 07:19 | … |
| 2 | 00:12 | 01:58 | 03:44 | 05:30 | 07:16 | …. |
| 3 | 00:06 | 01:52 | 03:38 | 05:24 | 07:10 | … |
| 4 | 00:00 | 01:46 | 03:32 | 05:18 | 07:04 | ….. |

Berdasarkan analisis model perempatan Kasihan Yogyakarta didapat durasi lampu lalu lintas yang baru sebagai berikut :

| Simpang i | Akhir Lampu merah Menyala pada simpang i+1 | Awal Lampu merah Menyala pada simpang i | Lama waktu selang | Lama waktu lampu merah |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 118 | 15 | 5 | 98 |
| 2 | 218 | 118 | 5 | 95 |
| 3 | 318 | 218 | 5 | 95 |
| 4 | 439 | 318 | 5 | 116 |

Dalam kasus penelitian ini juga, diteliti periode lampu merah, maka kita dapat peroleh matriks A adalah

$$A=\begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 20 \\ 22 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 26 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 28 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Nilai eigen dan vektor eigen atas matriks A dapat dicari dengan menggunakan langkah langkah di bawah ini:

1. Mengawali dengan vektor awal sebarang $x(0) \neq \varepsilon$

$$x(0)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Iterasi $\mathbf{x}(k+1) = A \otimes \mathbf{x}(k)$ hingga ada bilangan bulat $\mathrm{s} > \mathrm{t} \geq 0$ serta bilangan riil c sedemikian sehingga suatu perilaku periodic terjadi yaitu $x(s) = c \otimes x(t)$,

Pada iterasi pertama

$$x(1) = A \otimes x(0) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 20 \\ 22 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 26 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 28 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 22 \\ 26 \\ 28 \end{pmatrix}$$

Iterasi kedua dilanjutkan

$$x(2) = A \otimes x(1) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 20 \\ 22 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 26 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 28 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 20 \\ 22 \\ 26 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 42 \\ 48 \\ 54 \end{pmatrix}$$

Iterasi ketiga masih berlanjut

$$x(3) = A \otimes x(2) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 20 \\ 22 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 26 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 28 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 48 \\ 42 \\ 48 \\ 54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74 \\ 70 \\ 68 \\ 76 \end{pmatrix}$$

Iterasi keempat masih berlanjut

$$x(4) = A \otimes x(3) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 20 \\ 22 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 26 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 28 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 74 \\ 70 \\ 68 \\ 76 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 \\ 96 \\ 96 \\ 96 \end{pmatrix}$$

Berdasarkna proses iterasi yang dilaksanakan, maka diperoleh hasil yang memenuhi algoritma power sebagau berikut :

$$\begin{pmatrix} 425 \\ 425 \\ 425 \\ 425 \end{pmatrix} = 425 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x(4) = 425 \otimes x(0)$$

3. Dengan menggunakan program Matlab maka diperoleh nilai eigennya 106,25 yang sama hasilnya jikan dicari menggunakan

$$\lambda = \frac{c}{s-t} = \frac{96}{4-0} = 24$$

4. Selanjutnya dicari calon dari vector eigen dengan $v = \oplus_{i=1}^{s-t} \left( \lambda^{\otimes(s-t-i)} \otimes x(t+i-1) \right)$. Jadi vector eigen yang bersesuaian adalah

$$\begin{aligned} v &= \oplus_{i=1}^{4} \left( 24^{\otimes 4-i} \otimes x(i-1) \right) \\ &= \left( 24^{\otimes 3} \otimes x(0) \right) \oplus \left( 24^{\otimes 2} \otimes x(1) \right) \oplus \left( 24^{\otimes 1} \otimes x(2) \right) \oplus \left( 24^{\otimes 0} \otimes x(3) \right) \\ &= maks \left\{ 72 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 48 + \begin{pmatrix} 20 \\ 22 \\ 26 \\ 28 \end{pmatrix}, 24 + \begin{pmatrix} 48 \\ 42 \\ 48 \\ 54 \end{pmatrix}, 0 + \begin{pmatrix} 74 \\ 70 \\ 68 \\ 76 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} 74 \\ 72 \\ 74 \\ 78 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. Selanjutnya diselidiki apakah v memenuhi $A \otimes v = \lambda \otimes v$.

$$A \otimes v = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 20 \\ 22 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 26 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 28 & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 74 \\ 72 \\ 74 \\ 78 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 98 \\ 96 \\ 98 \\ 102 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \otimes v = 24 \otimes \begin{pmatrix} 74 \\ 72 \\ 74 \\ 78 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 98 \\ 96 \\ 98 \\ 102 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian, vector eigen atas matriks A yang bersesuaian dengan $\lambda = 24$ adalah $\begin{pmatrix} 74 \\ 72 \\ 74 \\ 78 \end{pmatrix}$.

Penggunaan vector eigen ini untuk dapat menetapkan kapan waktu awal menyalanya lampu lalu lintas. Awal menyalanya lampu lalu lintas dapat didapatkan dengan cara pengurangan setiap elemen yang ada pada vector eigen dengan elemen pada vector eigen yang paling kecil. Dalam permasalahan ini, elemen vector eigen terkecil adalah 72. Di pihak lain, nilai eigen yang diperoleh dipergunakan untuk menetapkan berapa keperiodikan lamanya nyala lampu lalu lintas baik yang hijau maupun yang merah. Karena diperoleh $\lambda = 24$ , maka tidak perlu diadakan pembulatan keperiodikan lama nyala lampu lalu lintas. Bagaimana pengaturan waktu nyala lampu lalu lintas untuk setiap fase dituliskan pada table di bawah ini dengan waktu awal nyala lampu lalu lintas aliran kendaraan pada fase ke 1 yaitu 0:00:00. Pada table di bawah ini, waktu nyala hijau ditandai dengan warna hijau dan nyala merah ditandai warna merah.

| Simpang | Fase 1 | Fase 2 | Fase 3 | Fase 4 | Fase 5 | dst |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 00:02 | 00:26 | 00:50 | 01:14 | 01:38 | … |
| 2 | 00:00 | 00:24 | 00:48 | 01:12 | 01:36 | …. |
| 3 | 00:02 | 00:26 | 00:50 | 01:14 | 01:38 | … |
| 4 | 00:06 | 00:30 | 00:54 | 01:18 | 01:42 | ….. |

Berdasarkan analisis model perempatan Kasihan Yogyakarta didapat durasi lampu lalu lintas yang baru sebagai berikut :

| Simpang i | Akhir Lampu hijau Menyala pada simpang i+1 | Awal Lampu hijau Menyala pada simpang i | Lama waktu selang | Lama waktu lampu hijau |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 24 | 2 | 5 | 17 |
| 2 | 50 | 24 | 5 | 21 |
| 3 | 78 | 50 | 5 | 23 |
| 4 | 98 | 78 | 5 | 15 |

## 4. KESIMPULAN

Waktu nyala lampu lalu lintas di perempatan dapat dimodelkan menggunakan aljabar maks plus. Dalam menentukan lama waktu nyala lampu lalu lintas menggunakan aljabar maks plus menggunakan dua inputan data yaitu lama waktu lampu merah dari masing masing perempatan dan lama waktu selang antar perempatan. Dengan menggunakan pemodelan aljabar maks plus, dapat ditetapkan nilai eigen dan vektor eigen yang nantinya bisa dimanfaatkan untuk menetapkan wakti nyala lampu lalu lintas dan periode nyala lampu lalu lintasnya. Pada penelitian ini, karena diperoleh nilai eigen 106,25, maka dapat digambarkan keperiodikan nyala lampu lalu lintas hijau .Selain itu, diperoleh juga vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen 106,25 yaitu $\begin{pmatrix} 438,75 \\ 437,5 \\ 431,25 \\ 425 \end{pmatrix}$ yang mendasari fase nyala lampu lalu lintas di setiap perempatan jalannya. Selain itu, keperiodikan lampu lalu lintas merah adalah 24 detik berdasarkan nilai eigen. Vektor eigen yang bersesuaian dengan niali eigen 24 adalah $\begin{pmatrix} 74 \\ 72 \\ 74 \\ 78 \end{pmatrix}$.

## DAFTAR PUSTAKA


Watiy, L. E., Syaripuddin, S., & A'yun, Q. Q. (2023). Penerapan Aljabar Max-Plus pada Pengaturan Durasi Waktu Lalu Lintas di Simpang Empat Air Putih Samarinda. *Basis: Jurnal Ilmiah Matematika*, *2*(1), 57-65.

Susilowati, E. (2023). Penerapan Sistem Persamaan Linear Aljabar Max Plus Pada Masalah Ground Handling di Terminal 1 Bandara Internasional Juanda. *SAINTIFIK*, *9*(2), 180-188. https://doi.org/10.31605/saintifik.v9i2.439

Susilowati, E. (2018). The Comparison Determining Of Some Route Of Angkot In Bandung By Using Greedy Algorithm And Min Plus Algorithm. *Lontar Komputer*, *9*(3), 182-191.

Cesari, L. W., & Rudhito, M. A. (2016). Optimasi Waktu Produksi dan Analisis Kepriodikan pada Graf Sistem Produksi Berloop dengan Menggunakan sistem Persamaan Linier Aljanar MAX-PLUS. *Perpustakaan Yogyakarta, Yogyakarta*.

Subiono, S. (2009). Aljabar Maxplus dan Aplikasinya: Model Sistem Antrian. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, *6*(1), 49.

Wibowo, A., Wijayanti, K., & Veronica, R. B. (2018). Penerapan aljabar max-plus pada pengaturan sistem antrian traffic light. *UNNES Journal of Mathematics*, *7*(2), 192-205.

Osniman, M., & Marcellinus, R. (2019). Model Aljabar Max-Plus Pada Sistem Antrian Pelayanan Penerbitan Surat Izin Usaha Perdagangan Bahan Berbahaya. *Asimtot: Jurnal Kependidikan Matematika*, *1*(2), 139-146.