

# Analisis Model Matematika Penyebaran Penyakit HIV/AIDS dengan Koinfeksi TB

Abraham<sup>\*1</sup>, Agustinus Langowuyo<sup>2</sup>  
<sup>1,2</sup>Jurusan Matematika Universitas Cenderawasih  
Email: [m1cb\\_buper@yahoo.co.id](mailto:m1cb_buper@yahoo.co.id)

## Abstrak

*Human Immunodeficiency Virus (HIV) merupakan virus penyebab penyakit Acquired Immunodeficiency Syndrome (AIDS). Virus ini mengakibatkan turunya fungsi kekebalan tubuh manusia. Belum ditemukannya obat untuk menyembuhkan penyakit ini mengakibatkan setiap penderita hanya diberikan terapi pengobatan yang bertujuan untuk memperlambat perkembangbiakan virus dalam tubuh penderita. Salah satu cara pengobatan yang dapat dilakukan bagi penderita penyakit HIV/AIDS adalah dengan melakukan terapi pengobatan yang dinamakan sebagai terapi ARV. Terapi ARV dapat membantu memperlambat perkembangan virus yang menyebar di dalam tubuh. Meski belum mampu menyembuhkan secara menyeluruh, namun terapi ARV mampu menurunkan angka kematian, kesakitan, dan meningkatkan kualitas hidup Orang Dengan HIV/AIDS (ODHA). Ada berbagai penyakit yang dapat menyerang penderita HIV, salah satunya adalah Tuberculosis (TB). Oleh karena itu ketika ada TB di daerah endemik HIV maka sangat mungkin terjadi infeksi bersama antara HIV dan TB. Pemodelan matematika merupakan salah satu ilmu terapan dalam bidang matematika yang sering digunakan untuk mencari solusi dalam berbagai kasus pada beberapa bidang ilmu. Dalam penelitian ini akan dibahas kasus adanya infeksi bersama antara HIV/AIDS dengan TB, dengan membentuk model matematika penyebaran penyakit HIV/AIDS dan koinfeksi penyakit TB dan menganalisis titik kestabilan model dan dampak penyakit TB di daerah endemik HIV. Berdasarkan hasil analisis model yang diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan non endemik  $E$  dan titik kesetimbangan endemik  $E_1$ . Titik kesetimbangan non endemik akan stabil secara asimptotik jika ambang batas  $R_0 < 1$  dan titik kesetimbangan endemik akan cenderung stabil tanpa gejala jika nilai ambang batas  $R_0 > 1$ .*

**Kata Kunci**—Pemodelan Matematika, HIV/AIDS, Tuberkulosis, Infeksi Bersama.

## 1. PENDAHULUAN

*Human Immunodeficiency Virus (HIV) merupakan retrovirus yang menjangkiti sel-sel kekebalan tubuh manusia (terutama CD4 positive T-sel dan *macrophages*-komponen-komponen utama sistem kekebalan sel), dan menghancurkan atau mengganggu fungsinya. Infeksi ini mengakibatkan terjadinya penurunan sistem kekebalan yang terus menerus, yang akan mengakibatkan defisiensi kekebalan tubuh. Sedangkan *Acquired Immunodeficiency Syndrome* (AIDS) menggambarkan berbagai gejala dan infeksi yang terkait dengan menurunnya sistem kekebalan tubuh. Sistem dianggap defisien ketika sistem tersebut tidak dapat lagi menjalankan fungsinya memerangi infeksi dan penyakit-penyakit. Orang yang kekebalan tubuhnya defisien (*immunodeficient*) menjadi lebih rentan terhadap berbagai ragam infeksi, yang sebagian besar jarang menjangkiti orang yang tidak mengalami defisiensi kekebalan. HIV/AIDS merupakan salah satu masalah kesehatan masyarakat yang memerlukan perhatian khusus, hal ini dapat dilihat dari tingginya jumlah kasus HIV/AIDS yang tiap tahunnya meningkat tanpa diimbangi dengan pertumbuhan populasi yang terjadi.*

*HIV yang menginfeksi sel CD4 akan berkembang biak. Tahapan perkembangan HIV di dalam tubuh manusia dibagi dalam empat tahap, yaitu: periode jendela, tanpa gejala, muncul gejala, dan AIDS. Perkembangan HIV ini dapat dihambat dengan memakai terapi antiretroviral (ART), yaitu mengkonsumsi obat antiretroviral (ARV) dengan tepat waktu dan terus-menerus untuk menurunkan jumlah virus dalam darah hingga virus tidak terdeteksi. Pada umumnya, terapi antiretroviral diawali dengan mengkonsumsi satu jenis ARV (monoterapi). Hal ini dilakukan oleh individu yang terinfeksi HIV dan belum terjangkit AIDS. Kadar*

obat dalam darah mempengaruhi keberhasilan terapi. Artinya jika kadar obat dalam darah terlalu rendah maka virus dapat resistan (kebal), akibatnya terapi akan gagal. Jika terapi dengan satu jenis ARV gagal, maka terapi bisa dilanjutkan dengan menggunakan kombinasi tiga ARV. Terapi dengan kombinasi tiga ARV dibagi menjadi dua, yaitu terapi lini pertama dan terapi lini kedua. Manfaat yang diperoleh dari memakai ART, antara lain: menghambat perkembangan HIV, meningkatkan jumlah sel CD4, menekan (mengurangi) jumlah virus dalam darah, dan memulihkan kondisi fisik sehingga orang dengan HIV/AIDS (ODHA) merasa lebih baik

Dengan melihat proses penularan virus HIV yang saat ini, masih lebih dominan terhadap kelompok usia produktif yaitu dengan pola perilaku yang berisiko seperti seks bebas yang tidak aman dan penggunaan narkoba melalui jarum suntik, dengan hubungan seksual (baik heteroseksual maupun homoseksual) sangat mendominasi yaitu mencapai 60%. Sedangkan melalui jarum suntik sekitar 30%, dan sebagian kecil lainnya yang tertular melalui proses ibu dan anak (kehamilan) dan transfusi darah. Di Indonesia, kecenderungan penularan infeksi HIV di seluruh provinsi prioritas hampir sama. Sejak Tahun 1987 sampai dengan Desember 2017, HIV/AIDS sudah tersebar di 421 dari 514 kabupaten/kota diseluruh provinsi yang ada di Indonesia dengan jumlah manusia yang terinfeksi HIV sebanyak 280.623 orang dan jumlah manusia yang terjangkit AIDS sebanyak 102.667 orang (Kemenkes, 2018). Penularan HIV saat ini sudah terjadi lebih awal, di mana kelompok usia produktif (15-29 tahun) banyak dilaporkan telah terinfeksi dan menderita AIDS

Pada bidang kesehatan, model matematika dapat digunakan untuk mengetahui bagaimana penyebaran suatu penyakit menular maupun tidak menular. Selain itu dapat juga digunakan untuk mengetahui jumlah penderita suatu penyakit, baik yang berupa endemik maupun non-endemik. Model penyebaran penyakit yang bersifat endemik disebut sebagai model epidemik. Model epidemik SIR dikenalkan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927 dalam buku “*A Contribution to The Mathematical Theory of Epidemics*” (Castellini dan Romanelli, 2007).

Salah satu bentuk penerapan Persamaan Diferensial Nonlinear Penyakit HIV/AIDS dengan prediksi perkembangan jumlah penderita yang terinfeksi dapat dimodelkan dengan menggunakan model matematis epidemiologi yaitu model Persamaan Diferensial nonlinear berupa SIR (*Susceptibel, Infectious and Recovered*).

## 2. METODE PENELITIAN

### 2.1 Sistem Persamaan Diferensial Orde Satu

Sistem persamaan diferensial adalah sebuah sistem yang di dalamnya memuat  $n$  buah persamaan diferensial, dengan  $n$  buah fungsi yang tidak diketahui, dimana  $n \geq 2, n \in \mathbb{Z}$ . Adapun bentuk umum dari sistem persamaan diferensial orde satu diberikan oleh definisi berikut.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{2.1}$$

dengan  $f_i: E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}, i = 1, 2, \dots, n$ , dan  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ . Kemudian diberikan syarat awal  $x_i(t_0) = x_{i0}, i = 1, 2, \dots, n$ .

Persamaan-persamaan dalam (2.1) dapat ditulis menjadi

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{2.2}$$

dengan  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T, \dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)^T$ , dan syarat awal  $\mathbf{x}(t_0) = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) = \mathbf{x}_0$ .

Sistem Persamaan (2.2) disebut sistem persamaan diferensial *autonomous* karena variabel untuk waktu  $t$  tidak muncul secara eksplisit. Selanjutnya jika  $f_1, f_2, \dots, f_n$  masing-masing linear dalam  $x_1, x_2, \dots, x_n$  maka persamaan-persamaan dalam (2.1) disebut sistem persamaan diferensial linear, dan dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} \vdots \\ x_n' = a_{h1}x_1 + a_{h2}x_2 + \dots + a_{hn}x_n \end{matrix} \quad (2.3)$$

Persamaan-persamaan dalam (2.3) dinyatakan dalam bentuk

$$\dot{x} = Ax \quad (2.4)$$

Jika  $f_1, f_2, \dots, f_n$  masing-masing tak linear dalam  $x_1, x_2, \dots, x_n$  maka persamaan-persamaan dalam (2.1) disebut sistem persamaan diferensial non linear.

## 2.2 Bilangan Reproduksi Dasar (Basic Reproduction Number)

Bilangan Reproduksi Dasar (*Basic Reproduction Number*) adalah jumlah rata-rata infeksi yang terjadi saat satu individu yang terinfeksi masuk ke dalam populasi *Susceptible* selama periode terinfeksi. Untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit diperlukan suatu parameter tertentu. Parameter yang biasa digunakan adalah *Basic Reproduction Number* atau yang biasa dinotasikan dengan  $R_0$ . *Basic Reproduction Number* didefinisikan sebagai bilangan yang menunjukkan jumlah individu rentan yang dapat menderita penyakit disebabkan oleh satu individu yang terinfeksi.

Kondisi yang akan timbul adalah satu diantara tiga kemungkinan berikut (Giesecke, 1994):

- Jika  $R_0 < 1$ , maka penyakit akan berkurang atau menghilang dalam populasi.
- Jika  $R_0 = 1$ , maka penyakit akan menetap dalam populasi.
- Jika  $R_0 > 1$ , maka penyakit akan meningkat menjadi wabah dalam populasi.

## 2.3 Titik Equilibrium dan Kestabilan

Misal suatu persamaan diferensial dinyatakan sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x)$$

Titik *equilibrium* merupakan titik gerak dari vektor keadaan konstan. Maka titik *equilibrium* dari persamaan ini diperoleh dengan syarat  $\frac{dx}{dt} = 0$ .

Kestabilan suatu titik *equilibrium* dapat diperiksa dari akar-akar karakteristik atau nilai eigen dengan menyelesaikan  $|\lambda I - A| = 0$  dimana  $A$  merupakan matriks dari sistem persamaan diferensial yang linear dan berukuran  $n \times n$ .

# 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

## 3.1 Pembentukan Model

Pada model epidemik SEIR, populasi dibagi menjadi empat kompartemen, yaitu Susceptible (S), Infected ( $I_{TB}$ ), Infected ( $I_H$ ), dan Infected ( $I_{TH}$ ). Kemudian  $S(t)$  menyatakan banyaknya individu rentan terhadap penyakit pada saat  $t$ ,  $I_{TB}(t)$  menyatakan banyaknya individu yang telah terinfeksi penyakit Tuberculosis (TB) pada saat  $t$ ,  $I_H(t)$  menyatakan banyaknya individu yang terinfeksi penyakit HIV/AIDS pada saat  $t$ ,  $I_{TH}(t)$  menyatakan banyaknya individu yang terinfeksi secara bersamaan antara HIV/AIDS dengan TB pada saat  $t$ , dan  $N(t)$  menyatakan total individu pada saat  $t$ . Selanjutnya  $S(t)$ ,  $I_{TB}(t)$ ,  $I_H(t)$ ,  $I_{TH}(t)$ , dan  $N(t)$  ditulis S, E, I, R, N.

Untuk membentuk model epidemik  $SI_{TB}I_HI_{TH}$  dengan penambahan parameter pengobatan, dibutuhkan pemahaman mengenai asumsi dan hubungan antar peubah terkait permasalahan yang dibahas. Berikut merupakan asumsi-asumsi yang dibuat dalam pembentukan model epidemik  $SI_{TB}I_HI_{TH}$  dengan penambahan parameter pengobatan.

- Populasi konstan, artinya  $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$ .
- Individu yang lahir masuk dalam kompartemen S.
- Individu yang terinfeksi kemungkinan akan sembuh dengan pengobatan atau secara alami. Jika tidak, maka akan mati secara alami atau karena sakit.

Model epidemik  $SI_{TB}I_HI_{TH}$  dengan penambahan parameter pengobatan dapat dibentuk ke dalam Sistem Persamaan (4.1) sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \alpha - \frac{\beta SI}{N} - \mu S \quad (3.1a)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - (\mu + \delta)E \quad (3.1b)$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - (\mu + d + \gamma + r)I \quad (3.1c)$$

$$\frac{dR}{dt} = (\gamma + r)I - \mu R \quad (3.1d)$$

dimana:

$\frac{dS}{dt}, \frac{dE}{dt}, \frac{dI}{dt}, \frac{dR}{dt}$  menyatakan laju perubahan jumlah individu pada tiap kompartemen per satuan waktu  $t$ .

### 3.2 Analisis Model

Berdasarkan model epidemik  $SI_{TB}I_H I_{TH}$  dengan penambahan parameter pengobatan yang telah dibentuk, akan dicari titik *equilibrium*-nya. Titik *equilibrium* diperoleh dengan syarat perlu laju perubahan masing-masing kompartemen terhadap waktu ( $t$ ) sama dengan nol, sehingga Sistem Persamaan (3.1) dapat dibentuk menjadi:

$$\alpha - \frac{\beta SI}{N} - \mu S = 0 \quad (3.2a)$$

$$\frac{\beta SI}{N} - (\mu + \delta)E = 0 \quad (3.2b)$$

$$\delta E - (\mu + d + \gamma + r)I = 0 \quad (3.2c)$$

$$(\gamma + r)I - \mu R = 0 \quad (3.2d)$$

Dari Persamaan (4.2c) diperoleh

$$\delta E - (\mu + d + \gamma + r)I = 0$$

$$\delta E = (\mu + d + \gamma + r)I$$

$$E = \frac{(\mu + d + \gamma + r)}{\delta} I \quad (3.3)$$

Substitusi Persamaan (4.3) ke Persamaan (4.2b), diperoleh

$$\frac{\beta SI}{N} - (\mu + \delta) \frac{(\mu + d + \gamma + r)}{\delta} I = 0$$

$$I \left( \frac{\beta S}{N} - (\mu + \delta) \frac{(\mu + d + \gamma + r)}{\delta} \right) = 0 \quad (4.4)$$

Dari Persamaan (4.4), diperoleh

$$I^* = 0$$

atau

$$\frac{\beta S}{N} - (\mu + \delta) \frac{(\mu + d + \gamma + r)}{\delta} = 0$$

$$\frac{\beta S}{N} = (\mu + \delta) \frac{(\mu + d + \gamma + r)}{\delta}$$

$$S^{**} = \frac{(\mu + \delta)(\mu + d + \gamma + r)N}{\delta\beta}$$

dimana:

$I^*$  = kompartemen  $I$  untuk titik *equilibrium* non-endemik.

$S^{**}$  = kompartemen  $S$  untuk titik *equilibrium* endemik.

Berdasarkan  $I^*$  dan  $S^{**}$  yang telah diperoleh, selanjutnya akan ditentukan titik *equilibrium*-nya.

Untuk  $I^* = 0$

Dari  $I^* = 0$ , selanjutnya diperoleh  $S^*$ ,  $E^*$ , dan  $R^*$  dengan mensubstitusikan  $I^*$  ke Persamaan (3.2a), (4.3), dan (4.2d).

$$\alpha - \frac{\beta SI}{N} - \mu S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha - \frac{\beta S(0)}{N} - \mu S = 0$$

$$\alpha - \mu S = 0$$

$$S^* = \frac{\alpha}{\mu}$$

$$E = \frac{(\mu + d + \gamma + r)}{\delta} I \quad \Leftrightarrow \quad E = \frac{(\mu + d + \gamma + r)}{\delta} (0)$$

$$E^* = 0$$

$$(\gamma + r)I - \mu R = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\gamma + r)(0) - \mu R = 0$$

$$R^* = 0$$

Sehingga

$$N^* = S^* + E^* + I^* + R^*$$

$$N^* = \frac{\alpha}{\mu} + 0 + 0 + 0$$

$$= \frac{\alpha}{\mu}$$

Jadi saat  $I^* = 0$ , diperoleh titik *equilibrium* non-endemik, yaitu titik *equilibrium* saat sistem bebas penyakit,  $E_0 = (S^*, E^*, I^*, R^*) = \left(\frac{\alpha}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ .

Untuk  $S^{**} = \frac{(\mu+\delta)(\mu+d+\gamma+r)N}{\delta\beta}$

Dari  $S^{**} = \frac{(\mu+\delta)(\mu+d+\gamma+r)N}{\delta\beta}$ , selanjutnya diperoleh  $I^{**}$  dengan mensubstitusikan  $S^{**}$  ke

Persamaan (3.2a).

$$\alpha - \frac{\beta SI}{N} - \mu S = 0$$

$$\frac{\beta SI}{N} = \alpha - \mu S$$

$$I = \frac{(\alpha - \mu S)N}{\beta S}$$

$$I^{**} = \frac{\left(\alpha - \frac{\mu N(\mu + \delta)(\mu + d + \gamma + r)}{\delta\beta}\right)}{\frac{(\mu + \delta)(\mu + d + \gamma + r)}{\delta}}$$

$E^{**}$  diperoleh dengan mensubstitusikan  $I^{**}$  ke Persamaan (3.3).

$$E = \frac{(\mu + d + \gamma + r)}{\delta} I$$

$$E = \frac{(\mu + d + \gamma + r)}{\delta} \left(\alpha - \frac{\mu N(\mu + \delta)(\mu + d + \gamma + r)}{\delta\beta}\right) \frac{\delta}{(\mu + \delta)(\mu + d + \gamma + r)}$$

$$E^{**} = \frac{\left(\alpha - \frac{\mu N(\mu + \delta)(\mu + d + \gamma + r)}{\delta\beta}\right)}{(\mu + \delta)}$$

Selanjutnya,  $R^{**}$  diperoleh dengan mensubstitusikan  $I^{**}$  ke Persamaan (3.2d).

$$R = \frac{(\gamma + r)}{\mu} I$$

$$R^{**} = \frac{(\gamma + r) \left(\alpha - \frac{\mu N(\mu + \delta)(\mu + d + \gamma + r)}{\delta\beta}\right)}{\mu \frac{(\mu + \delta)(\mu + d + \gamma + r)}{\delta}}$$

Jadi saat  $I \neq 0$ , diperoleh titik *equilibrium* endemik, yaitu titik *equilibrium* saat sistem endemik.  $E_1 = (S^{**}, E^{**}, I^{**}, R^{**})$  dengan

$$S^{**} = \frac{(\mu+\delta)(\mu+d+\gamma+r)N}{\delta\beta} \tag{3.5}$$

$$E^{**} = \frac{\alpha\delta\beta - \mu N(\mu+\delta)(\mu+d+\gamma+r)}{\delta\beta(\mu+\delta)} \tag{3.6}$$

$$I^{**} = \frac{\alpha\delta\beta - \mu N(\mu+\delta)(\mu+d+\gamma+r)}{\beta(\mu+\delta)(\mu+d+\gamma+r)} \tag{3.7}$$

$$R^{**} = \frac{(\gamma+r)(\alpha\delta\beta - \mu N(\mu+\delta)(\mu+d+\gamma+r))}{\mu\beta(\mu+\delta)(\mu+d+\gamma+r)} \tag{3.8}$$

Sebelum melakukan analisis kestabilan titik *equilibrium*, perlu dibentuk matriks Jacobi dari Sistem Persamaan (4.1). Berikut merupakan perhitungan matriks Jacobi model epidemik Sehingga diperoleh matriks Jacobian

$$J(S, E, I, R) = \begin{bmatrix} -\frac{\beta I}{N} - \mu & 0 & -\frac{\beta S}{N} & 0 \\ \frac{\beta I}{N} & -(\mu + \delta) & \frac{\beta S}{N} & 0 \\ 0 & \delta & -(\mu + d + \gamma + r) & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma + r) & -\mu \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Analisis kestabilan dapat dilakukan dengan cara melihat nilai eigen pada matriks  $J_{E_0}$  untuk titik-titik yang dianalisis.

Selanjutnya dengan mensubstitusi  $E_0 = (S^*, E^*, I^*, R^*) = (\frac{\alpha}{\mu}, 0, 0, 0)$  dengan  $N^* = S^* = \frac{\alpha}{\mu}$  ke

Persamaan (4.9), diperoleh matriks Jacobian

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & -(\mu + \delta) & \beta & 0 \\ 0 & \delta & -(\mu + d + \gamma + r) & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma + r) & -\mu \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Persamaan karakteristik Sistem Persamaan (3.1) pada  $E_0$  diperoleh dengan menghitung nilai eigen dari Persamaan (3.10).

$$\det(\lambda I - J_{E_0}) = 0$$

Titik *equilibrium* dikatakan stabil jika

$$V > 0, \frac{WX-Y}{W} > 0, Y - \frac{W^2Z}{WX-Y} > 0, Z > 0.$$

Maka titik *equilibrium* non-endemik  $E_0$  stabil asimtotik jika

$$W, Z > 0, X > \frac{Y}{W}, Y > \frac{W^2Z}{WX-Y},$$

dengan

$$W = (4\mu + d + \gamma + r + \delta)$$

$$X = (6\mu^2 + 3\mu(d + \gamma + r + \delta) + \delta(d + \gamma + r - \beta))$$

$$Y = (4\mu^3 + 3\mu^2(d + \gamma + r + \delta) + 2\mu\delta(d + \gamma + r - \beta))$$

$$Z = (\mu^4 + \mu^3(d + \gamma + r + \delta) + \mu^2\delta(d + \gamma + r - \beta))$$

*Basic Reproduction Number* ( $R_0$ ) dengan penambahan parameter pengobatan diperoleh dengan menggunakan *Next Generation Matrix*. Kompartemen terinfeksi Sistem Persamaan (3.2) adalah  $I$ . Menurut Driessche dan Watmough (2002), Sistem Persamaan (3.2) dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) = F(x) - V(x) \\ &= F(x) - (V^-(x) - V^+(x)) \end{aligned}$$

*Basic Reproduction Number* ( $R_0$ ) dengan penambahan parameter pengobatan adalah nilai eigen determinan (*radius spectral*) dari  $FV^{-1}$

$$\begin{aligned} FV^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\mu + \delta) & 0 \\ -\delta & (\mu + d + \gamma + r) \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{(\mu + \delta)(\mu + d + \gamma + r)} \begin{pmatrix} (\mu + d + \gamma + r) & 0 \\ \delta & (\mu + \delta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\delta\beta}{(\mu + \delta)(\mu + d + \gamma + r)} & \frac{\beta}{(\mu + d + \gamma + r)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Maka

$$\det(\lambda I - FV^{-1}) = 0$$

$$\lambda = \frac{\delta\beta}{(\mu + \delta)(\mu + d + \gamma + r)} \text{ atau } \lambda = 0$$

Jadi,

$$R_0 = \frac{\delta\beta}{(\mu + \delta)(\mu + d + \gamma + r)}. \quad (3.17)$$

Jika  $R_0 > 1$ , maka penyakit akan meningkat menjadi wabah dalam populasi. Kemudian jika  $R_0 < 1$ , maka penyakit akan berkurang atau menghilang dalam populasi. Sehingga dapat dikatakan bahwa pada saat  $R_0 < 1$ , maka penyakit akan berkurang atau menghilang dan populasi akan menuju ke  $S^* = \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)$ . Sedangkan jika  $R_0 > 1$ , maka penyakit akan menyebar dan meningkat, sehingga populasi  $S$  akan berkurang (kurang dari  $\frac{\alpha}{\mu}$ ).

#### 4. KESIMPULAN

Pada model penyebaran penyakit HIV dengan koinfeksi TB didapatkan dua titik setimbang yaitu titik setimbang non endemik  $E$  dan endemik  $E_*$ . Titik setimbang non endemik  $E = \left(\frac{\alpha}{\mu}, 0, 0, 0\right)$  dan titik setimbang endemic  $E_*$ . Titik setimbang non endemik stabil asimtotis jika memenuhi  $R_0 = \max(R_h, R_t) < 1$  dengan  $R_h = \frac{\beta a}{\mu(\mu+\gamma)}$  dan  $R_t = \frac{e\theta a}{\mu k(\delta+\gamma)}$

Sedangkan dari beberapa studi kasus, titik setimbang endemic  $E_*$  cenderung stabil asimtotis jika memenuhi  $R_0 = \max(R_h, R_t) > 1$  dengan  $R_h = \frac{\beta a}{\mu(\mu+\gamma)}$  dan  $R_t = \frac{e\theta a}{\mu k(\delta+\gamma)}$

Hasil simulasi model penyebaran penyakit HIV dengan koinfeksi TB menunjukkan bahwa ada kecenderungan penyakit HIV/AIDS berhubungan, ini dapat dilihat dengan meningkatnya risiko penyakit TB, hal ini disebabkan oleh lemahnya imunitas tubuh penderita HIV/AIDS sehingga penyakit TB mudah untuk menyerang. Penderita HIV/AIDS yang terkena infeksi TB menyumbangkan lebih banyak basil Mycobacterium Tuberculosis di lingkungan dibandingkan individu yang terinfeksi TB saja. Oleh karena jumlah basil Mycobacterium Tuberculosis di lingkungan yang bertambah, penderita TB di lingkungan tersebut juga cenderung bertambah.

#### DAFTAR PUSTAKA

- Abraham, Tandianga T. *Pemodelan Matematika Penyebaran Penyakit HIV-AIDS Dengan Pengaruh Terapi Pada Populasi tertutup*. Prosiding LPPM Universitas Cenderawasih. 2020;(265-273).
- Blower SM, Hartel D, et al, 1991. *Drugs, Sex and HIV: a mathematical model for New York City*. Phil Trans R. Soc Lond B 321, 171-187.
- Braunm M, 1983. *Differential Equations and Their Applications*. New York., U.S.A.: Springer Verlag.
- Boyce, W.E. Dprima, R. 1997. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley and Sons, Inc. Singapore.
- Chaharborj, S.S, et al., 2010. *Behavior Stability in Two SIR-Style Models for HIV*. Int. Journal of Math Analysis. 4(9): 427-434.
- Daniel Maxin. And Fabio Augusto Milner, 2007. *The Effect of Nonreproductive Groups on Persistent Sexually Transmitted Diseases*. J. Math. Biosc and Engin, Vol 4, Number 3.
- KPAN, 2009. *Komisi Penanggulangan AIDS Nasional (KPAN). 2009, Data Kasus HIV dan AIDS Indonesia*. <http://www.aids-ina.org>.
- McKendrick AG, 1926. *Application of Mathematics to Medical Problems*. Proc. Math. Soc. Endinburgh 44: 98 – 130.
- Meyer, W. J., 1987. *Concepts Of Mathematical Modelling*, McGraw-Hill International Editions, New York.