

Kestabilan Model Petri Net pada Sistem Antrian Bank Menggunakan Metode Kestabilan *Lyapunov*

Suci Rahmawati^{*1}, Farly Oktrianny Haning², Dian Yuliati³, Windy Lestari⁴

^{1,4}Institut Sains dan Teknologi Nahdlatul Ulama Bali

²Universitas Nusa Cendana

³Universitas Islam Negeri Sunan Ampel Surabaya

e-mail: aing.chie@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini mengembangkan dari hasil penelitian tentang pemodelan sistem antrian di salah satu cabang bank X dengan menggunakan *coloured petri nets*. Penelitian sebelumnya membutuhkan waktu yang cukup lama untuk memperoleh waktu pelayanan nasabah yang digunakan untuk menentukan nilai estimasi parameter sebagai validasi model tersebut. Tujuan penelitian ini adalah mengkonstruksi *Petri Net* sistem antrian bank X menggunakan *software pipe v.4.3.0*. Model *petri net* ini berbeda dengan model pada penelitian sebelumnya. *Petri Net* yang dikonstruksi lebih sederhana tetapi mampu merepresentasikan keadaan dan alur sistem yang sama. Selanjutnya dilakukan analisis kestabilan model *Petri Net* menggunakan kestabilan *Lyapunov* untuk mengetahui kestabilan model tersebut. Hasil analisis kestabilan model sistem yang diperoleh pada penelitian ini menunjukkan bahwa model yang dibentuk menggunakan *Petri Net* merupakan model yang tidak stabil dan tidak dapat distabilkan. Model tidak stabil disebabkan oleh adanya transisi yang bersifat *always enable*.

Kata kunci—Sistem Antrian, *Petri Net*, Kestabilan *Lyapunov*

1. PENDAHULUAN

Bank merupakan badan usaha yang menghimpun dana dari masyarakat dalam bentuk simpanan dan menyalurkannya kepada masyarakat dalam bentuk kredit atau bentuk-bentuk lainnya dalam rangka meningkatkan taraf hidup rakyat banyak. Hampir seluruh elemen masyarakat memanfaatkan bank dalam hal ini yaitu menjadi nasabah bank. Hal tersebut disebabkan karena bank memberikan banyak jasa yang dirasa memiliki banyak fungsi di tengah masyarakat. Diantaranya adalah menyediakan pembiayaan dan penempatan dana, memberikan kredit, dll. Banyaknya jumlah nasabah bank dapat menyebabkan adanya antrian dalam pelayanan bank.

Antrian pelayanan bank merupakan salah satu kejadian sistem event diskrit yaitu perubahan keadaannya terjadi pada waktu tertentu. kejadian sistem event diskrit dapat dimodelkan menggunakan petri net. Beberapa penelitian tentang kejadian sistem event diskrit khususnya sistem antrian telah dilakukan (Hardiyanti, A., S., 2018; Dian, M., 2018; Osniman P, M., et al, 2021). Selain itu, Penelitian tentang kestabilan model sistem event diskrit menggunakan *Petri Net* yaitu kestabilan lyapunov pada pemodelan respirasi selular dengan petri net berwaktu (Melinda et al., 2019). Kestabilan model petri net dari sistem pembayaran tagihan listrik PT. PLN (Persero) Raya Ambon Timur dilakukan sebelumnya (Zumrotus S., 2021). Penelitian tentang konstruksi pemodelan sistem antrian bank menggunakan *coloured petri net* dan validasi model menggunakan *Maxium Likelihood Estimation* dalam menentukan nilai estimasi parameter (Rahmawati, S., 2016). Pada penelitian tersebut membutuhkan waktu yang cukup lama agar dapat memperoleh waktu pelayanan nasabah yang digunakan untuk menentukan nilai estimasi parameter. Oleh karena itu, tujuan penelitian ini adalah mengkonstruksi model *Petri Net* yang lebih sederhana namun mampu merepresentasikan keadaan dan alur sistem antrian pelayanan bank X pada penelitian sebelumnya. Selanjutnya dilakukan analisis kestabilan model *Petri Net* menggunakan kestabilan *Lyapunov* untuk mengetahui apakah model tersebut stabil atau tidak, jika tidak stabil akan ditunjukkan apakah model dapat distabilkan.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan beberapa tahapan yaitu pertama membentuk bagan alur sistem antrian pelayanan bank. Alur sistem tersebut diperoleh dari penelitian sebelumnya (Rahmawati, S., 2016). Tahapan kedua mengkonstruksi model *Petri Net* sistem antrian pelayanan bank menggunakan *pipe v4.3.0*. Ketiga menganalisa kestabilan model *Petri Net* sistem antrian bank menggunakan kestabilan *Lyapunov*. Beberapa teori terkait penelitian ini akan dipaparkan, diantaranya teori tentang *Petri Net* dan Kestabilan *Lyapunov*.

2.1. *Petri Net*.

Petri Net merupakan salah satu instrument untuk memodelkan suatu sistem kejadian diskrit. Pada *Petri Net* kejadian direpresentasikan oleh transisi. Suatu kejadian dapat terjadi jika beberapa keadaan dipenuhi. Keadaan dalam *Petri Net* berkaitan dengan *place*.

Definisi *Petri Net* adalah himpunan $\{P, T, A, w\}$ dengan P notasi dari himpunan berhingga *place* yaitu $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, T merupakan notasi dari himpunan berhingga transisi yaitu $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, A melambangkan himpunan semua *arc* (garis berarah) yang menghubungkan antara *place* dan transisi, w merupakan fungsi bobot dimana $w: A \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$ (Subiono, 2015).

Representasi dari suatu *Petri net* dapat berupa notasi matriks. *Petri net* dapat direpresentasikan dengan dua matriks yang disebut dengan matriks *backward incidence* (A_b) dan matriks *forward incidence* (A_f). Masing-masing matriks memiliki ukuran $n \times m$ dengan n adalah banyaknya *place* dan m banyaknya jumlah transisi. Elemen dari matriks tersebut merupakan bilangan bulat tak negatif. Elemen pada matriks A_b merupakan nilai atau bobot garis busur berarah dari *place* ke transisi, untuk elemen matriks A_f yaitu bobot garis busur berarah dari transisi ke *place*. Matriks *incidence* (A) adalah representasi dari model *Petri Net* yang diperoleh dengan cara mengurangi matriks *forward incidence* (A_f) dengan matriks *backward incidence* (A_b) (Adzkiya, D., 2008)

$$A = A_f - A_b \quad (1)$$

2.2. *Kestabilan Lyapunov pada Model Petri Net Sistem Event Diskrit*

Misalkan e_k adalah notasi suatu vektor *firing*. Jika *firing* dilakukan hanya pada transisi t_j pada saat k maka vektor *firing* $e_k = [0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots]^T$ dimana elemen ke j adalah 1 dan lainnya bernilai 0. Persamaan matriks yang menunjukkan perilaku dinamik yang ditunjukkan oleh model *Petri Net* yaitu sebagai berikut:

$$M_k = M + Ae ; e = \sum_{k=0}^{d-1} e_k \quad (2)$$

matriks M_k menunjukkan keadaan token pada *place* p_i pada saat ke- k dan M adalah matriks *incidence* dari model *Petri Net* mempunyai keadaan $M_k = [M_k(p_1), M_k(p_2), \dots, M_k(p_m)]^T$ menunjukkan suatu keadaan sistem yang dimodelkan dengan *Petri Net*. Kemudian dimisalkan suatu fungsi *Lyapunov* $v(k, M_k) = M_k^T \phi$ dimana ϕ adalah vektor dimensi m dengan semua elemen bernilai lebih besar atau sama dengan nol merupakan vektor (*strictly positive*) (Smith, A., 2016).

Proposisi 1. *Petri Net* disebut stabil jika memuat m vektor dengan seluruh elemen vektor adalah positif, dengan kata lain dapat diperoleh vektor ϕ (*strictly positive*) sedemikian sehingga berlaku, (Konigsberg, Z.R., 2011):

$$\Delta v = e^T A^T \phi \leq 0 \quad (3)$$

Karena vektor *firing* e selalu bernilai positif minimal ada satu elemen vektor e yang bernilai lebih besar dari nol. Maka persamaan (3) cukup dibuktikan dengan (Zumrotus, S., 2021)

$$A^T \phi \leq 0 \quad (4)$$

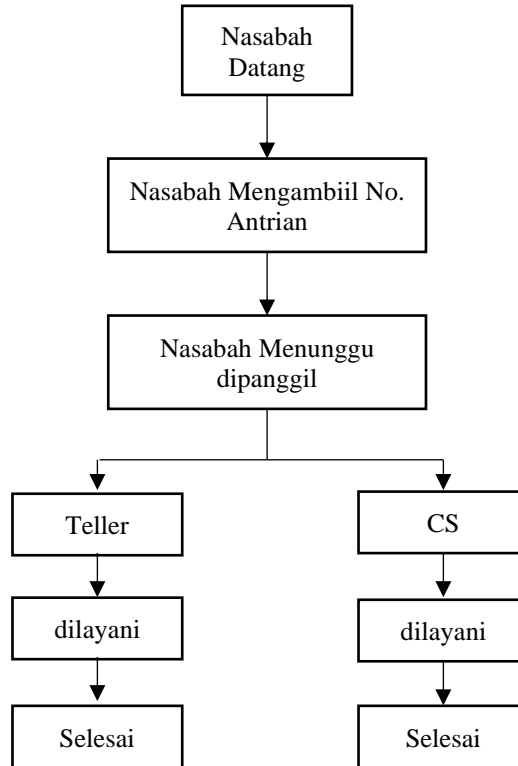
Proposisi 2. *Petri Net* dapat distabilkan jika terdapat vektor *firing* pada transisi yang mempunyai vektor *firing* e , sedemikian sehingga berlaku, (Konigsberg, Z.R., 2011):

$$Ae \leq 0 \quad (5)$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Alur Sistem Antrian Pelayanan Nasabah di Salah Satu Bank

Digambarkan suatu alur dari sistem antrian nasabah bank dari mulai nasabah datang masuk ke kantor bank, kemudian nasabah mengambil nomor antrian pada mesin yang telah disediakan, setelah memperoleh nomor antrian nasabah menunggu dipanggil oleh teller atau *customer service* (CS) sesuai dengan nomor antriannya. Pada saat teller dan CS siap untuk melayani kepentingan nasabah, maka teller atau CS memanggil nasabah berdasarkan nomor antriannya, selanjutnya nasabah dilayani oleh teller atau CS sampai selesai. Alur sistem tersebut ditunjukkan oleh bagan pada Gambar 1.

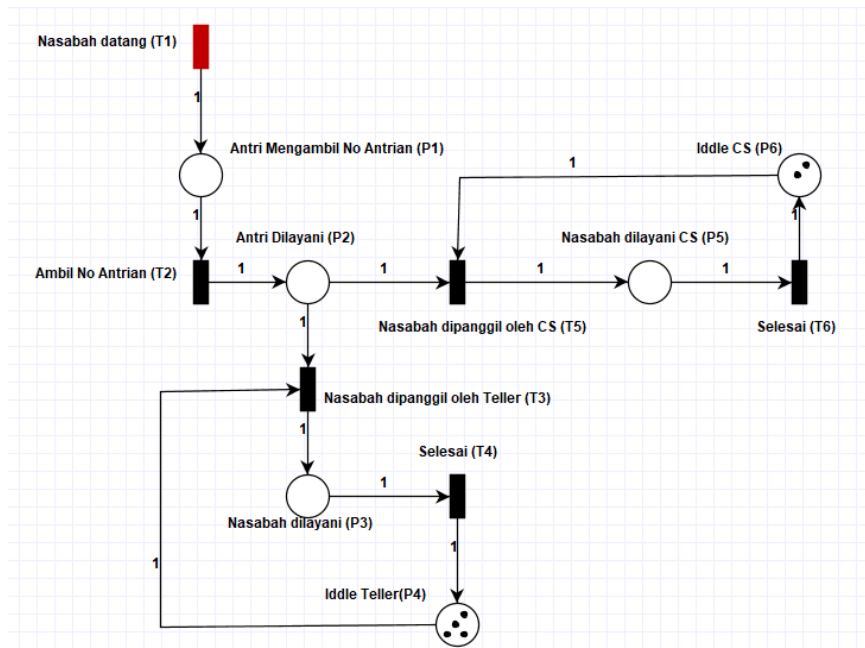


Gambar 1. Alur Sistem Antrian Pelayanan Nasabah Bank

Berdasarkan penjelasan alur sistem pada 3.1 akan dikonstruksi model *Petri Net* pada sistem antrian bank.

3.2. Model *Petri Net* Sistem Antrian pada Salah Satu Bank

Model *Petri Net* dikonstruksi menggunakan *software pipe* v4.3.0. Adapun model *Petri Net* yang dikonstruksi ditunjukkan oleh Gambar 2.



Gambar 2 Bentuk Pemodelan Sistem Antrian Pelayanan Nasabah Bank Menggunakan Petri Net

Keterangan:

- p_1 = Nasabah antri mengambil no antrian bank
- p_2 = Nasabah menunggu urutan dipanggil Teller/CS untuk dilayani
- p_3 = Nasabah dilayani Teller
- p_4 = Idle / Teller yang siap melayani nasabah
- p_5 = Nasabah dilayani oleh CS
- p_6 = Idle / CS yang siap melayani nasabah
- t_1 = Nasabah datang ke bank
- t_2 = Nasabah mengambil nomor antrian
- t_3 = Nasabah dianggil teller sesuai nomor antrian
- t_4 = Nasabah selesai dilayani oleh Teller
- t_5 = Nasabah dipanggil oleh CS sesuai nomor antrian
- t_6 = Nasabah selesai dilayani oleh CS.

Dari model *Petri Net* yang ditunjukkan oleh Gambar 2, dapat dibentuk matriks *backward incidence* (A_b) sebagai berikut:

$$A_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari model *Petri Net* yang ditunjukkan oleh Gambar 2 juga dapat dibentuk matriks *forward incidence* (A_f) sebagai berikut:

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks incidence (A)

$$A = A_f - A_b$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3. Kestabilan Model Petri Net Sistem Antrian Pelayanan Bank

Berdasarkan Petri Net yang telah dikonstruksi berdasarkan alur sistem pelayanan nasabah, selanjutnya akan di paparkan kestabilan dari model Petri Net tersebut. Kestabilan dianalisis menggunakan teori kestabilan Lyapunov.

Suatu Petri Net disebut stabil apabila memuat m strictly positive vector ϕ . Misalkan vektor $\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_6]^T$ dengan mensubstitusikan pada persamaan (3) yaitu $A^T \phi = 0$ maka diperoleh vektor ϕ sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T \phi \leq 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 0 \\ -\phi_1 + \phi_2 &= 0 \rightarrow \phi_2 = \phi_1 \\ -\phi_2 + \phi_3 - \phi_4 &= 0 \\ -\phi_3 + \phi_4 &= 0 \rightarrow \phi_4 = \phi_3 \\ \phi_5 - \phi_6 &= 0 \rightarrow \phi_5 = \phi_6 \\ -\phi_2 - \phi_5 + \phi_6 &= 0 \end{aligned}$$

Misalkan:

$$\phi_3 = \phi_4 = s, \phi_5 = \phi_6 = t$$

$$\text{Jadi } \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s \\ s \\ t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Pada penyelesaian di atas terlihat bahwa didapatkan vektor ϕ yang tidak *stricly positive*. Oleh karena itu model Petri Net sistem antrian bank yang ditunjukkan oleh gambar 2 bersifat tidak stabil.

Selanjutnya akan ditunjukkan proses apakah model sistem antrian tersebut dapat distabilkan, dengan menggunakan persamaan (4) yaitu $Ae \leq 0$ dengan memisalkan $e = [e_1, e_2, e_3, \dots, e_6]^T$ diperoleh vektor *firing* e sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_1 - e_2 = 0 \rightarrow e_1 = e_2$$

$$e_2 - e_3 - e_6 = 0$$

$$e_3 - e_4 = 0 \rightarrow e_3 = e_4$$

$$-e_3 + e_4 = 0 \rightarrow e_4 = e_3$$

$$e_5 - e_6 = 0 \rightarrow e_5 = e_6$$

$$-e_5 + e_6 = 0 \rightarrow e_6 = e_5$$

Misalkan:

$$e_1 = s$$

$$e_2 = s$$

$$e_3 = t$$

$$e_4 = t$$

$$e_2 - e_3 - e_6 = 0$$

$$e_2 - e_3 = e_6$$

$$s - t = e_6$$

Sehingga:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ t \\ t \\ s - t \\ s - t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} t$$

Hasil tersebut di atas menunjukkan bahwa model *Petri Net* sistem antrian pelayanan yang ditunjukkan oleh gambar 2 tidak stabil dan tidak dapat distabilkan, karena tidak memenuhi syarat bahwa vektor *firing* e selalu bernilai tak negatif (Zumrotus A., 2021).

4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan tersebut di atas, dapat disimpulkan bahwa:

1. Bentuk model sistem antrian pelayanan nasabah bank yang dimodelkan dengan Petri Net adalah tidak stabil.
2. Adapun penyebab model Petri Net tidak stabil yaitu dikarenakan terdapat suatu transisi yang selalu enable.
3. Model Petri Net sistem antrian pelayanan nasabah bank yang ditunjukkan oleh gambar 2 merupakan bentuk model yang tidak dapat distabilkan.

4. Model Petri Net tidak dapat distabilkan karena tidak memenuhi syarat bahwa vektor *firing e* selalu bernilai tak negatif.
5. Berdasarkan penelitian ini *Petri Net* mampu merepresentasikan keadaan sistem antrian yang sama seperti pada penelitian sebelumnya.
6. Penelitian ini dapat dikembangkan dengan membentuk model aljabar maxplus berdasarkan model Petri Net pada sistem antrian pelayanan bank yang ditunjukkan oleh gambar 2.

DAFTAR PUSTAKA

- Adzkiya, D., (2008) Membangun Model Petri Net Lampu Lalu Lintas dan Simulasinya, *Tesis*, Program Pasca Sarjana Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)., Surabaya.
- Afif, ahmad, & Mustofani, D. (2019). Model Rantai Pasok Pada Sistem Produksi Menggunakan Petri Net dan Aljabar Max Plus. *UJMC (Unisda Journal of Mathematics and Computer Science)*, 5(01), 1 - 8. <https://doi.org/https://doi.org/10.52166/ujmc.v5i01.1465>
- Batubara, D, A., (2019) Pemodelan Sistem Antrian Pembuatan Kartu Kredit Bank Mega Menggunakan Petri Net, *Tesis*, Program Pascasarjana Matematika, Universitas Mercu Buana., Jakarta Barat.
- Mustofani, D. (2018). Model Antrian Pelayanan Farmasi Menggunakan Petri Net dan Aljabar Max-Plus. *JMPM: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 3(1), 33-43.
- Hardiyanti, S. A., Yuniawati, I., & Yustita, A. D. (2017). Bentuk petri net dan model aljabar max plus pada sistem pelayanan pasien rawat jalan Rumah Sakit Al Huda Genteng, Banyuwangi. *UJMC (Unisda Journal of Mathematics and Computer Science)*, 3(2), 1-8.
- Konigsberg, Z. R. (2013). Timed petri nets modeling and lyapunov/max-plus algebra stability analysis for a type of queuing systems. *International journal of pure and applied mathematics*, 86(2), 301-323.
- Sari, M. M., & Mariatul Kiftiah, Y. KESTABILAN LYAPUNOV PADA PEMODELAN RESPIRASI SELULAR DENGAN PETRI NET BERWAKTU. *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, 8(1). 35-42. <http://dx.doi.org/10.26418/bimst.v8i1.30515>
- Maure, O. P., Ningsi, G. P., & Nay, F. A. (2021). Pemodelan Sistem Antrian Pasien Rawat Jalan Menggunakan Petri Net dan Aljabar Max-Plus: Studi Kasus RSUD di Yogyakarta. *Leibniz: Jurnal Matematika*, 1(2), 1-11. Retrieved from <https://ejournal.unisap.ac.id/index.php/leibniz/article/view/101>
- Muhammad, H., & Wahyuni, S. (2022). Generalization of Von-Neumann Regular Rings to Von-Neumann Regular Modules. *KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XXI 2022*, 22, 31.
- Smith, A. (2017). Lyapunov Stability Analysis of Initiation Process in DNA (Deoxyribonucleid Acid) Translation Using Petri Net. *Applied Mathematical Sciences Journal*, 11(64), 3153-3162.
- Subiono, A. M. M. P. (2015). Terapannya. *Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember*.
- Subiono, S., & Sya'diyah, Z. (2011). Lyapunov-Max-Plus-Algebra Stability in Predator-prey Systems Modeled with Timed Petri Net. *IPTEK The Journal for Technology and Science*, 22(3). <http://dx.doi.org/10.12962/j20882033.v22i3.70>
- Sya'diyah, Z. (2021). Kestabilan Model Petri Net dari Sistem Pembayaran Tagihan Listrik PT. Pln (Persero) Rayon Ambon Timur. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 15(4), 601-606.