

Analisis dan Solusi Numerik Model Matematika pada Penyebaran Covid-19 di Provinsi Sulawesi Selatan dengan Metode Runge Kutta dan Adams-Bashforth-Moulton

Syafruddin Side^{*1}, Amni Rasyidah², Wahidah Sanusi³

^{1,2,3}Universitas Negeri Makassar

e-mail: syafruddin@unm.ac.id

Abstrak

Penelitian terapan ini bertujuan untuk membangun model matematika SEIAR pada penyebaran Covid-19. Kemudian melakukan analisis dan menentukan solusi numerik dari model matematika penyebaran Covid-19 di Sulawesi Selatan. Analisis model dilakukan dengan menentukan titik kesetimbangan, kestabilan model, dan bilangan reproduksi dasar (R_0). Solusi numerik model diperoleh dengan metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM) orde lima. Solusi awal metode ABM diperoleh dengan metode Runge Kutta Klasik, Runge Kutta Fehlberg, dan Runge Kutta Merson. Uji model dilakukan dengan bantuan Maple dan berdasarkan data bulanan (sekunder) jumlah kasus Covid-19 tahun 2021 yang terkonfirmasi di Sulawesi Selatan. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit model matematika Covid-19 dikatakan stabil asimtotik jika $R_0 \leq 1$ dan tidak stabil ketika $R_0 > 1$ serta titik kesetimbangan endemik model stabil asimtotik. Pada penentuan solusi numerik model menunjukkan metode Runge Kutta Klasik lebih baik dalam memberikan solusi awal pada metode ABM dengan jumlah iterasi yang lebih sedikit dan galat yang lebih kecil dibandingkan Runge Kutta Fehlberg dan Runge Kutta Merson..

Kata Kunci – Model Matematika, Covid-19, Metode Numerik, Adams-Bashforth-Moulton, Runge Kutta Klasik, Runge Kutta Fehlberg, Runge Kutta Merson.

1. PENDAHULUAN

Perkembangan ilmu pengetahuan matematika pada kesehatan memberikan peranan penting dalam menganalisa dan mengontrol penyebaran penyakit yang dapat dianalisa dalam bentuk model matematika (Side, 2015). Salah satu model matematika dalam kesehatan yaitu penyebaran suatu penyakit yaitu penyebaran wabah Covid-19.

Covid-19 (Coronavirus Disease 2019) adalah penyakit menular pada gangguan pernafasan yang disebabkan oleh salah satu jenis virus corona yaitu Sars-Cov-2. Virus corona adalah zoonosis yang menularkan antara hewan dan manusia. Gejala umum infeksi Covid-19 antara lain gejala gangguan pernafasan akut seperti demam, batuk dan sesak napas. Pada kasus Covid-19 yang berat dapat menyebabkan pneumonia, sindrom pernafasan akut, gagal ginjal, dan bahkan kematian (Kemenkes RI, 2020). Hingga Maret 2021, pandemi Covid-19 di Indonesia telah berlangsung selama satu tahun dengan kasus positif bertambah 5.937 menjadi 1.511.712 kasus, pasien sembuh bertambah 5.635 menjadi 1.348.330 orang dan pasien meninggal bertambah 104 menjadi 40.858 orang (Anonim2, 2021). Laporan media harian Covid-19 per 13 Februari 2021 pukul 12.00 WIB menunjukkan 5 provinsi dengan penambahan kasus tertinggi (Anonim1, 2021). Salah satunya yaitu Sulawesi Selatan dengan penambahan 381 kasus baru dan 467 pasien sembuh dari COVID-19 (Annas, S et al, 2020).

Penyelesaian permasalahan model matematika penyebaran Covid-19 memerlukan suatu solusi. Solusi dengan metode analitik sulit digunakan pada model matematika Covid-19 karena model tersebut termasuk model matematika non linear sehingga dibutuhkan metode numerik dalam mencari solusi. Metode numerik yang digunakan yaitu metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM) dengan metode Runge Kutta Klasik, Runge Kutta Fehlberg, dan Runge Kutta Merson sebagai metode dalam menentukan solusi awal

model (Kuzuairi, 2016). Penelitian tentang pemodelan matematika pada penyebaran Covid-19 dan solusi numerik model matematika menggunakan metode Runge Kutta dan Adams-Bashforth-Moulton telah dilakukan oleh (Annas, *et al*, 2020) (Ramadhan, *et al*, 2021) (Makhlouf, *et al*, 2019) (Apriadi, *et al*, 2014) (Mondal, *et al*, 2017) (Zikri, *et al*, 2019) (Abdy, *et al*, 2021) (Sanusi, *et al*, 2021), tetapi belum ada yang melakukan penelitian mengenai solusi numerik model penyebaran Covid-19 dengan menggunakan metode gabungan antara model Runge Kutta dan Adams-Bashforth-Moulton, sehingga penelitian ini menjadi penting karena kedua metode ini memiliki ketelitian yang lebih tinggi dibandingkan metode lainnya (Yuni, 2022).

2. METODE PENELITIAN

Jenis penelitian ini adalah penelitian terapan yaitu menganalisis model matematika penyebaran Covid-19 di Sulawesi Selatan serta mengkaji penggunaan metode Runge Kutta (Ramadhan, *et al*, 2021) (Zikri, *et al*, 2019) dan Adams-Bashforth-Moulton (Kuzuairi, *et al*, 2016) dalam menyelesaikan solusi numerik pada model matematika tersebut. Sumber data yang digunakan pada penelitian ini adalah data bulanan (sekunder) jumlah kasus Covid-19 terkonfirmasi positif Covid-19 yang diperoleh dari Dinas Kesehatan Provinsi Sulawesi Selatan. Langkah awal yang dilakukan adalah membangun model yaitu Susceptible, Exposed, Asymptomatic, Infected, dan Recovered (SEAIR), Selanjutnya menentukan titik kesetimbangan penyakit dan kesetimbangan bebas penyakit serta kestabilan model SEAIR, dan dilanjutkan dengan menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0) kemudian menentukan nilai awal dan parameter dari data yang diperoleh. Selanjutnya akan disimulasikan dengan menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM) yaitu dengan metode Runge Kutta Klasik, Runge Kutta Fehlberg, dan Runge Kutta Merson untuk memperoleh solusi numerik dan selanjutnya akan dibandingkan dengan memperhatikan nilai rata-rata galat yang diperoleh tiap-tiap metode dengan cara :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{N_{prediksi} - N_{Eksak}}{N_{Eksak}} \right) i}{\text{Banyak Iterasi } t(\text{Bulan})}$$

Sehingga metode yang memiliki rentang galat paling kecil akan metode yang paling akurat dari prediksi penyebaran Covid-19 yang terkonfirmasi di provinsi Sulawesi Selatan.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Formulasi model matematika penyebaran Covid-19

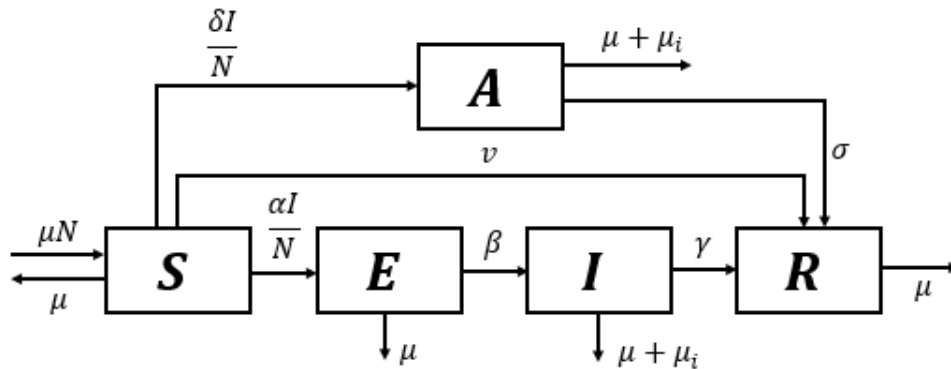
Berdasarkan klasifikasi operasional Covid-19 (Annas, *et al*, 2020), populasi total (N) dibagi menjadi lima kelas (kompartemen) yaitu: Suscepted pada kasus suspek atau yang rentan terpapar Covid-19 (S), Exposed pada kasus probable (E), Asimptomatic pada kasus terkonfirmasi Covid-19 tanpa gejala (A), Infected pada kasus yang terkonfirmasi Covid-19 dengan gejala (I), dan Recovered (R) pada kasus yang sembuh dari penyakit.

Beberapa asumsi yang ditetapkan dalam membangun formasi model matematika penyebaran Covid-19 dengan parameter yang terdefinisi pada Tabel 1 yaitu sebagai berikut:

- Terdapat kelahiran dan kematian dalam populasi dan tidak terdapat migrasi
- Laju kelahiran sama dengan laju kematian alami
- Terdapat individu yang rentan terpapar Covid-19 (suscepted)
- Terdapat individu yang kontak dengan terinfeksi sehingga memiliki gejala-gejala dengan gambaran klinis meyakinkan Covid-19 dan belum terkonfirmasi positif dalam hal ini disebut kasus probable (exposed)
- Terdapat individu yang terkonfirmasi positif Covid-19 dengan gejala (infected)
- Terdapat individu yang terkonfirmasi positif Covid-19 tanpa gejala (asimptomatic)
- Terdapat individu yang telah bebas (sembuh) dari Covid-19 (recovered)
- Terdapat individu yang mendapatkan vaksinasi sehingga telah sembuh dari Covid-19
- Terdapat laju kematian akibat terkonfirmasi positif Covid-19

- Individu yang telah sembuh memiliki kekebalan terhadap Covid-19

Berdasarkan asumsi-asumsi diperoleh model matematika penyebaran Covid-19 dalam bentuk diagram transfer pada Gambar 1.



Gambar 1. Diagram Model Matematika Penyebaran Covid-19

Tabel 1. Definisi variabel/parameter

Variabel / Parameter	Definisi
N	Jumlah populasi manusia
S	Jumlah populasi yang rentang terinfeksi virus Covid-19
E	(Suspected)
I	Jumlah populasi yang terpapar virus Covid-19 (Exposed)
A	Jumlah populasi yang terinfeksi virus Covid-19 (Infected)
R	Jumlah populasi yang terinfeksi virus Covid-19 dengan bebas gejala (Asymptomatic)
μ	Jumlah populasi yang berhasil dan bebas dari virus Covid-19 (Recovered)
μ_i	Jumlah populasi yang berhasil dan bebas dari virus Covid-19 (Recovered)
α	Tingkat kematian populasi
β	Tingkat kematian populasi oleh Covid-19
γ	Laju perubahan dari S ke E
δ	Laju perubahan dari E ke I
σ	Laju perubahan dari I ke R
v	Laju perubahan dari S ke A
	Laju perubahan dari A ke R
	Vaksinasi pada populasi S

Formulasi untuk model matematika penyebaran Covid-19 sesuai pada Gambar 1 dituliskan dalam bentuk sistem persamaan differensial (1.1 – 1.4) berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \left(v + \mu + \frac{\alpha I}{N} + \frac{\delta I}{N} \right) S \tag{1.1}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\alpha I S}{N} - (\beta + \mu) E \tag{1.2}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta E - (\gamma + \mu + \mu_i) I \tag{1.3}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\delta I S}{N} - (\sigma + \mu + \mu_i) A \tag{1.4}$$

$$\frac{dR}{dt} = vS + \gamma I + \sigma A - \mu R \tag{1.5}$$

dimana $N = S + E + I + A + R$ adalah total populasi.

Formulasi persamaan diferensial (1.1) sampai (1.5) dapat disederhanakan dengan $s = \frac{S}{N}$, $e = \frac{E}{N}$, $i = \frac{I}{N}$, $a = \frac{A}{N}$, dan $r = \frac{R}{N}$ sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial (2):

$$\frac{ds}{dt} = \mu - (v + \mu + \alpha i + \delta i)s \quad (2.1)$$

$$\frac{de}{dt} = \alpha is - (\beta + \mu)e \quad (2.2)$$

$$\frac{di}{dt} = \beta e - (\gamma + \mu + \mu_i)i \quad (2.3)$$

$$\frac{da}{dt} = \delta is - (\sigma + \mu + \mu_i)a \quad (2.4)$$

$$\frac{dr}{dt} = vs + \gamma i + \sigma a - \mu r \quad (2.5)$$

3.2 Analisis model matematika pada penyebaran Covid-19

Analisis model matematika pada penyebaran Covid-19 terlebih dahulu menentukan titik kesetimbangan dan bilangan reproduksi dasar (R_0). Untuk menentukan titik kesetimbangan sistem (2.1-2.5) diperoleh dengan cara menyelesaikan persamaan:

$$\frac{ds}{dt} = 0, \frac{de}{dt} = 0, \frac{di}{dt} = 0, \frac{da}{dt} = 0, \frac{dr}{dt} = 0.$$

Dengan demikian diperoleh sistem persamaan (3) berikut:

$$\mu - (v + \mu + \alpha i + \delta i)s = 0 \quad (3.1)$$

$$\alpha is - (\beta + \mu)e = 0 \quad (3.2)$$

$$\beta e - (\gamma + \mu + \mu_i)i = 0 \quad (3.3)$$

$$\delta is - (\sigma + \mu + \mu_i)a = 0 \quad (3.4)$$

$$vs + \gamma i + \sigma a - \mu r = 0 \quad (3.5)$$

Sistem persamaan model matematika penyebaran Covid-19 memiliki dua jenis titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan tidak bebas penyakit atau endemik.

a) Bebas penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit merupakan keadaan dimana penyakit menular tidak menyebar dalam suatu populasi dan terjadi pada saat $I = 0$. Untuk $I = 0$ maka diperoleh $e = i = a = 0$. Substitusi $e = i = a = 0$ ke persamaan (3.1) sampai (3.5) sehingga diperoleh:

$$s = \frac{\mu}{v+\mu}$$

$$r = \frac{v}{v+\mu}$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit pada penyebaran Covid-19 yaitu:

$$(s, e, i, a, r) = \left(\frac{\mu}{v+\mu}, 0, 0, 0, \frac{v}{v+\mu} \right)$$

b) Tidak bebas penyakit (Endemik)

Titik kesetimbangan penyebaran penyakit yang endemik yaitu solusi dari sistem persamaan (3).

$$s^* = \frac{\alpha\beta}{(\beta+\mu)(\gamma+\mu+\mu_i)}$$

$$e^* = \frac{\alpha\beta\mu - (v+\mu)(\beta+\mu)(\gamma+\mu+\mu_i)}{\beta(\alpha+\delta)(\beta+\mu)}$$

$$i^* = \frac{\alpha\beta\mu - (v+\mu)(\beta+\mu)(\gamma+\mu+\mu_i)}{(\alpha+\delta)(\beta+\mu)(\gamma+\mu+\mu_i)}$$

$$a^* = \frac{\delta(\alpha\beta\mu - (v+\mu)(\beta+\mu)(\gamma+\mu+\mu_i))}{\alpha\beta(\alpha+\delta)(\sigma+\mu+\mu_i)}$$

$$r^* =$$

$$\frac{v(\alpha+\delta)(\beta+\mu)^2(\gamma+\mu+\mu_i)^2(\sigma+\mu+\mu_i) + \alpha\beta\gamma(\alpha\beta\mu - (v+\mu)(\beta+\mu)(\gamma+\mu+\mu_i))(\sigma+\mu+\mu_i) + \sigma\delta(\alpha\beta\mu - (v+\mu)(\beta+\mu)(\gamma+\mu+\mu_i))(\beta+\mu)(\gamma+\mu+\mu_i)}{\alpha\beta\mu(\alpha+\delta)(\beta+\mu)(\gamma+\mu+\mu_i)(\sigma+\mu+\mu_i)}$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan endemik pada penyebaran Covid-19 yaitu:

$$(s^*, e^*, i^*, a^*, r^*) = \left(\begin{array}{c} \frac{(\beta + \mu)(\gamma + \mu + \mu_i)}{\alpha\beta} \\ \frac{\alpha\beta\mu - (v + \mu)(\beta + \mu)(\gamma + \mu + \mu_i)}{\beta(\alpha + \delta)(\beta + \mu)} \\ \frac{\alpha\beta\mu - (v + \mu)(\beta + \mu)(\gamma + \mu + \mu_i)}{(\alpha + \delta)(\beta + \mu)(\gamma + \mu + \mu_i)} \\ \frac{\delta(\alpha\beta\mu - (v + \mu)(\beta + \mu)(\gamma + \mu + \mu_i))}{\alpha\beta(\alpha + \delta)(\sigma + \mu + \mu_i)} \\ \frac{v(\alpha + \delta)(\beta + \mu)^2(\gamma + \mu + \mu_i)^2(\sigma + \mu + \mu_i) + \alpha\beta\gamma(\alpha\beta\mu - (v + \mu)(\beta + \mu)(\gamma + \mu + \mu_i))(\sigma + \mu + \mu_i) + \sigma\delta(\alpha\beta\mu - (v + \mu)(\beta + \mu)(\gamma + \mu + \mu_i))(\beta + \mu)(\gamma + \mu + \mu_i)}{\alpha\beta\mu(\alpha + \delta)(\beta + \mu)(\gamma + \mu + \mu_i)(\sigma + \mu + \mu_i)} \end{array} \right)$$

Selanjutnya, dalam menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0) diperoleh *Next Generation Matrix* dari sistem persamaan (2):

$$F = \begin{pmatrix} \alpha i s \\ 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} (\beta + \mu)e \\ (\gamma + \mu + \mu_i)i - \beta e \end{pmatrix}$$

$$F' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, V' = \begin{pmatrix} \beta + \mu & 0 \\ -\beta & \gamma + \mu + \mu_i \end{pmatrix}$$

$$(V')^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta + \mu} & 0 \\ \frac{\beta}{(\beta + \mu)(\gamma + \mu + \mu_i)} & \frac{1}{\gamma + \mu + \mu_i} \end{pmatrix}$$

$$F'(V')^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha\beta s}{(\beta + \mu)(\gamma + \mu + \mu_i)} & \frac{\alpha s}{\gamma + \mu + \mu_i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_0 = \frac{\alpha\beta s}{(\beta + \mu)(\gamma + \mu + \mu_i)}$$

$$R_0 = \frac{\alpha\beta\mu}{(v + \mu)(\beta + \mu)(\gamma + \mu + \mu_i)}$$

Dengan demikian, bilangan reproduksi dasar model matematika penyebaran Covid-19 yaitu:

$$R_0 = \frac{\alpha\beta\mu}{(v + \mu)(\beta + \mu)(\gamma + \mu + \mu_i)}$$

Selanjutnya, dilakukan analisis kestabilan pada titik kesetimbangan model penyebaran Covid-19 dengan memperhatikan teorema-teorema berikut:

Teorema 1

Titik kesetimbangan bebas penyakit model matematika penyebaran Covid-19 dikatakan stabil asimtotik jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil ketika $R_0 > 1$ (Side, 2022).

Bukti:

Berdasarkan sistem persamaan (4.2) diperoleh matriks Jacobian (J) berikut:

$$J = \begin{pmatrix} -(v + \mu + (\alpha + \delta)i) & 0 & -(\alpha + \delta)s & 0 & 0 \\ \alpha i & -(\beta + \mu) & \alpha s & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -(\gamma + \mu + \mu_i) & 0 & 0 \\ \delta i & 0 & \delta s & -(\mu + \mu_i + \sigma) & 0 \\ v & 0 & \gamma & \sigma & -\mu \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - J| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + (v + \mu + (\alpha + \delta)i) & 0 & (\alpha + \delta)s & 0 & 0 \\ -\alpha i & \lambda + (\beta + \mu) & -\alpha s & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & \lambda + (\gamma + \mu + \mu_i) & 0 & 0 \\ -\delta i & 0 & -\delta s & \lambda + (\mu + \mu_i + \sigma) & 0 \\ -v & 0 & -\gamma & -\sigma & \lambda + \mu \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda + \mu)(\lambda + (\mu + \mu_i + \sigma)) \begin{vmatrix} \lambda + (v + \mu + (\alpha + \delta)i) & 0 & (\alpha + \delta)s \\ -\alpha i & \lambda + (\beta + \mu) & -\alpha s \\ 0 & -\beta & \lambda + (\gamma + \mu + \mu_i) \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda + \mu)(\lambda + (\mu + \mu_i + \sigma)) \left((\lambda + (v + \mu + (\alpha + \delta)i)) \left((\lambda + (\beta + \mu))(\lambda + (\gamma + \mu + \mu_i)) - \alpha\beta s \right) + \alpha i(\beta(\alpha + \delta))s \right) = 0 \quad (4.1)$$

Substitusi nilai titik kesetimbangan bebas penyakit (s, e, i, a, r) yaitu $s = u(u + v)^{-1}$ dan $i = 0$ ke persamaan (4.1) sehingga diperoleh:

$$(\lambda + \mu)(\lambda + (\mu + \mu_i + \sigma))(\lambda + v + \mu) \left((\lambda + (\beta + \mu)) (\lambda + (\gamma + \mu + \mu_i)) - \alpha\beta u(u + v)^{-1} \right) = 0 \quad (4.2)$$

Perhatikan bahwa:

$$(\lambda + (\beta + \mu)) (\lambda + (\gamma + \mu + \mu_i)) - \alpha\beta u(u + v)^{-1} = 0 \quad (4.3)$$

Berdasarkan aturan tanda *Descartes*, persamaan (4.3) akan memiliki akar-akar negatif jika semua tanda pada setiap suku-sukunya positif sehingga agar persamaan (4.2) memiliki akar-akar negatif maka haruslah $R_0 \leq 1$. Oleh karena itu maka dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik jika $R_0 \leq 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$. ■

Teorema 2

Titik kesetimbangan endemik penyakit model matematika penyebaran Covid-19 stabil asimtotik (Side, 2022).

Bukti:

Berdasarkan persamaan (4.1) substitusi nilai titik kesetimbangan endemik $(s^*, e^*, i^*, a^*, r^*)$ sehingga diperoleh:

$$(\lambda + \mu)(\lambda + (\mu + \mu_i + \sigma)) \left((\lambda + v + \mu + (\alpha + \delta)i)(\lambda^2 + ((\beta + \mu) + (\gamma + \mu + \mu_i))\lambda) + (\beta + \mu)(\gamma + \mu + \mu_i)(\alpha + \delta)i \right) = 0 \quad (4.4)$$

Perhatikan bahwa:

$$\left((\lambda + v + \mu + (\alpha + \delta)i)(\lambda^2 + ((\beta + \mu) + (\gamma + \mu + \mu_i))\lambda) + (\beta + \mu)(\gamma + \mu + \mu_i)(\alpha + \delta)i \right) = 0 \quad (4.5)$$

Dari persamaan (4.5) diperoleh bahwa semua tanda pada setiap suku-sukunya positif sehingga berdasarkan aturan tanda *Descartes* (Martha, 2022), persamaan (4.4) memiliki akar-akar negatif. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan endemik model matematika penyebaran Covid-19 stabil asimtotik. ■

3.3 Solusi numerik model matematika penyebaran Covid-19 di Sulawesi Selatan menggunakan metode Runge Kutta dan Adams-Bashforth-Moulton

Metode Runge Kutta Klasik orde lima (Ramadhan, 2021) :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6) \quad (5.1)$$

$$\text{dengan } k_1 = hf(x_n, y_n); k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right); k_3 = hf\left(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{16}(3k_1 + k_2)\right)$$

$$k_4 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_3\right); k_5 = hf\left(x_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{16}(-k_2 + 2k_3 + 3k_4)\right)$$

$$k_6 = hf\left(x_n + h, y_n + \frac{1}{7}(k_1 + 4k_2 + 6k_3 - 12k_4 + 8k_5)\right)$$

untuk $n = 0, 1, 2, 3, 4$

Substitusi sistem persamaan (2) ke persamaan (5.1) diperoleh hasil iterasi pada Tabel 2.

Tabel 2. Data kasus Covid-19 dengan metode Runge Kutta Klasik (K)

t (Bulan)	$Suspected_K$	$Exposed_K$	$Infected_K$	$Asymtomatic_K$	$Recovered_K$
0	0,834525775	0,001302319	0,000206834	8,8595E-05	0,163876477
1	0,834146322	0,00122986	0,000126255	-1,03409E-06	0,164238691
2	0,833766869	0,001157402	4,56766E-05	-9,06632E-05	0,164600904
3	0,833387416	0,001084944	-3,49022E-05	-0,000180292	0,164963118
4	0,833007962	0,001012485	-0,000115481	-0,000269921	0,165325332
5	0,832628509	0,000940027	-0,00019606	-0,000359551	0,165687546

Metode Runge Kutta Fehlberg orde lima (Ramadhan, 2021):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56437}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \quad (5.2)$$

dengan :

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{3}{8}h, y_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right)$$

$$k_4 = hf\left(x_n + \frac{12}{13}h, y_n + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right)$$

$$k_5 = hf\left(x_n + h, y_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3860}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right)$$

$$k_6 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right)$$

untuk $n = 0, 1, 2, 3, 4$

Dengan mensubstitusi sistem persamaan (2) ke (5.2) diperoleh hasil iterasi pada Tabel 3.

Tabel 3. Data kasus Covid-19 dengan metode Runge Kutta Fehlberg (F)

t (Bulan)	$Suspected_F$	$Exposed_F$	$Infected_F$	$Asymtomatic_F$	$Recovered_F$
0	0,834525775	0,001302319	0,000206834	8,8595E-05	0,163876477
1	0,834152963	0,000929506	-0,000165978	-0,000284217	0,163503664
2	0,83378015	0,000556694	-0,000538791	-0,00065703	0,163130852
3	0,833407338	0,000183881	-0,000911603	-0,001029842	0,162758039
4	0,833034525	-0,000188931	-0,001284416	-0,001402655	0,162385227
5	0,832661713	-0,000561744	-0,001657228	-0,001775468	0,162012414

Metode Runge Kutta Merson orde lima [8]:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_4 + k_5) \quad (5.3)$$

dengan :

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{6}(k_1 + k_2)\right)$$

$$k_4 = hf \left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{8}(k_1 + k_2) \right)$$

$$k_5 = hf \left(x_n + h, y_n + \frac{1}{2}(k_1 - 3k_3 + 4k_4) \right)$$

untuk $n = 0, 1, 2, 3, 4$

Substitusi sistem persamaan (2) ke persamaan (5.3) diperoleh hasil iterasi pada Tabel 4.

Tabel 4. Data kasus Covid-19 dengan metode Runge Kutta Merson (M).

t (Bulan)	$Suspected_M$	$Exposed_M$	$Infected_M$	$Asymtomatic_M$	$Recovered_M$
0	0,834525775	0,001302319	0,000206834	8,8595E-05	0,163876477
1	0,834160753	0,000937296	-0,000158188	-0,000276427	0,163511454
2	0,833795731	0,000572274	-0,000523211	-0,00064145	0,163146432
3	0,833430708	0,000207251	-0,000888233	-0,001006472	0,16278141
4	0,833065686	-0,000157771	-0,001253255	-0,001371495	0,162416387
5	0,832700663	-0,000522793	-0,001618278	-0,001736517	0,162051365

3.4 Solusi numerik model matematika penyebaran Covid-19 menggunakan persamaan prediktor metode Adams-Bashforth orde lima

Metode prediktor Adams-Bashforth orde lima dengan rumus sebagai berikut:

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + \frac{h}{720} (1901f_n - 2774f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4}) \quad (6.1)$$

Sistem persamaan (2) disubstitusi ke persamaan (6.1) diperoleh sistem persamaan (7) berikut sebagai prediktor Adams-Bashforth orde lima:

$$S_{n+1}^{(0)} = S_n + \frac{h}{720} (1901f_n - 2774f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4}) \quad (7.1)$$

$$E_{n+1}^{(0)} = E_n + \frac{h}{720} (1901f_n - 2774f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4}) \quad (7.2)$$

$$I_{n+1}^{(0)} = I_n + \frac{h}{720} (1901f_n - 2774f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4}) \quad (7.3)$$

$$A_{n+1}^{(0)} = A_n + \frac{h}{720} (1901f_n - 2774f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4}) \quad (7.4)$$

$$R_{n+1}^{(0)} = R_n + \frac{h}{720} (1901f_n - 2774f_{n-1} + 2616f_{n-2} - 1274f_{n-3} + 251f_{n-4}) \quad (7.5)$$

Metode korektor Adams-Moulton orde lima dengan rumus sebagai berikut:

$$y_{n+1}^{(k)} = y_n + \frac{h}{720} (251f_{n+1} + 646f_n - 264f_{n-1} + 106f_{n-2} - 19f_{n-3}) \quad (6.2)$$

dengan $k = 1, 2, 3, 4, \dots$

Sistem persamaan (2) substitusi ke persamaan (6.2) diperoleh sistem persamaan (8) berikut sebagai korektor Adams-Moulton orde lima:

$$S_{n+1}^{(k)} = S_n + \frac{h}{720} (251f_{n+1}^{(0)} + 646f_n - 264f_{n-1} + 106f_{n-2} - 19f_{n-3}) \quad (8.1)$$

$$E_{n+1}^{(k)} = E_n + \frac{h}{720} (251f_{n+1}^{(0)} + 646f_n - 264f_{n-1} + 106f_{n-2} - 19f_{n-3}) \quad (8.2)$$

$$I_{n+1}^{(k)} = I_n + \frac{h}{720} (251f_{n+1}^{(0)} + 646f_n - 264f_{n-1} + 106f_{n-2} - 19f_{n-3}) \quad (8.3)$$

$$A_{n+1}^{(k)} = A_n + \frac{h}{720} (251f_{n+1}^{(0)} + 646f_n - 264f_{n-1} + 106f_{n-2} - 19f_{n-3}) \quad (8.4)$$

$$R_{n+1}^{(k)} = R_n + \frac{h}{720} (251f_{n+1}^{(0)} + 646f_n - 264f_{n-1} + 106f_{n-2} - 19f_{n-3}) \quad (8.5)$$

Iterasi solusi numerik model matematika Covid-19 menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton disajikan pada Tabel 5, Tabel 6, dan Tabel 7.

Tabel 5. Iterasi dengan solusi awal menggunakan metode Runge Kutta Klasik

t	$S_{K_{n+1}}^{(t)}$	$E_{K_{n+1}}^{(t)}$	$I_{K_{n+1}}^{(t)}$	$A_{K_{n+1}}^{(t)}$	$R_{K_{n+1}}^{(t)}$
6	0,832712	0,00094	-0,000196	-0,00036	0,165704
7	0,832795	0,00094	-0,000196	-0,00036	0,165721
8	0,832878	0,00094	-0,000196	-0,00036	0,165737
9	0,832962	0,00094	-0,000196	-0,00036	0,165754
10	0,833045	0,00094	-0,000196	-0,00036	0,16577

Tabel 6. Iterasi dengan solusi awal menggunakan metode Runge Kutta Fehlberg

t	$S_{F_{n+1}}^{(t)}$	$E_{F_{n+1}}^{(t)}$	$I_{F_{n+1}}^{(t)}$	$A_{F_{n+1}}^{(t)}$	$R_{F_{n+1}}^{(t)}$
6	0,832744976	-0,000561806	-0,0016574	-0,001775651	0,16202861
7	0,832828259	-0,000561858	-0,001657562	-0,001775825	0,162044818
8	0,832911545	-0,000561916	-0,001657729	-0,001776003	0,162061022
9	0,83299484	-0,000561972	-0,001657894	-0,001776181	0,162077229
10	0,833078144	-0,000562028	-0,00165806	-0,001776359	0,162093438

Tabel 7. Iterasi dengan solusi awal menggunakan metode Runge Kutta Merson

t	$S_{M_{n+1}}^{(t)}$	$E_{M_{n+1}}^{(t)}$	$I_{M_{n+1}}^{(t)}$	$A_{M_{n+1}}^{(t)}$	$R_{M_{n+1}}^{(t)}$
6	0,832783931	-0,000522851	-0,001618445	-0,001736696	0,162067565
7	0,832867218	-0,0005229	-0,001618604	-0,001736866	0,162083776
8	0,832950507	-0,000522953	-0,001618766	-0,001737041	0,162099984
9	0,833033806	-0,000523006	-0,001618928	-0,001737215	0,162116195
10	0,833117114	-0,000523058	-0,00161909	-0,001737389	0,162132408

Keakuratan diantara ketiga metode Runge Kutta dapat dilihat dari solusi model matematika pada penyebaran Covid-19 dan ketiga jenis metode Runge Kutta dibandingkan dengan memperhatikan nilai rata-rata galat yang diperoleh tiap-tiap metode. Metode yang memiliki nilai rata-rata galat yang paling kecil selama rentang waktu yang ditentukan, maka metode tersebut yang akan dikatakan lebih akurat (Apriad, *et al*, 2014). Hasil perbandingan galat antara ketiga jenis metode Runge Kutta tersebut disajikan pada Tabel 8 sampai Tabel 12.

Tabel 8. Perbandingan rata-rata galat *Suscepted*

t	S_{eksak}	$error_{S_K}$	$error_{S_F}$	$error_{S_M}$
1	0,832596311	0,001550011	0,001556652	0,001564442
2	0,830685653	0,003081216	0,003094497	0,003110077
3	0,828793621	0,004593795	0,004613717	0,004637087
4	0,826920044	0,006087919	0,006114482	0,006145642
5	0,825064723	0,007563786	0,00759699	0,007635941
6	0,823227492	0,009484277	0,009517485	0,009556439
7	0,821408175	0,011386873	0,011420084	0,011459042
8	0,819606601	0,01327173	0,013304944	0,013343906
9	0,817822597	0,015139026	0,015172244	0,01521121
10	0,816056277	0,016988646	0,017021867	0,017060837
	Rata-rata	0,008914728	0,008941296	0,008972462

Tabel 9. Perbandingan rata-rata galat *Exposed*

t	E_{eksak}	$error_{E_K}$	$error_{E_F}$	$error_{E_M}$
1	0,001283881	5,40208E-05	0,000354375	0,000346585
2	0,001265705	0,000108303	0,000709012	0,000693432
3	0,001247788	0,000162844	0,001063907	0,001040537
4	0,001230126	0,00021764	0,001419057	0,001387897
5	0,001212714	0,000272687	0,001774458	0,001735508
6	0,00119555	0,00025543	0,001757356	0,001718401
7	0,00117863	0,000238415	0,001740488	0,00170153
8	0,00116195	0,000221641	0,001723866	0,001684903
9	0,001145507	0,000205105	0,001707479	0,001668513
10	0,001129304	0,000188807	0,001691332	0,001652362
Rata-rata		0,000192489	0,001394133	0,001362967

Tabel 10. Perbandingan rata-rata galat *Infected*

t	I_{eksak}	$error_{I_K}$	$error_{I_F}$	$error_{I_M}$
1	0,00021214	8,5885E-05	0,000378119	0,000370329
2	0,000217174	0,000171498	0,000755965	0,000740385
3	0,000221944	0,000256847	0,001133548	0,001110177
4	0,000226458	0,000341939	0,001510874	0,001479714
5	0,000230726	0,000426785	0,001887954	0,001849003
6	0,000234753	0,000430834	0,001892153	0,001853198
7	0,000238549	0,000434649	0,001896111	0,001857153
8	0,000242121	0,00043824	0,001899849	0,001860887
9	0,000245475	0,000441614	0,00190337	0,001864403
10	0,000248608	0,000444766	0,001906668	0,001867698
Rata-rata		0,000347306	0,001516461	0,001485295

Tabel 11. Perbandingan rata-rata galat *Asimptomatic*

t	A_{eksak}	$error_{A_K}$	$error_{A_F}$	$error_{A_M}$
1	8,78E-05	8,87873E-05	0,000371971	0,000364181
2	6,96E-06	9,76252E-05	0,000663992	0,000648412
3	8,62E-05	0,000266511	0,001116061	0,00109269
4	8,55E-05	0,000355441	0,001488174	0,001457014
5	8,49E-05	0,000444412	0,001860329	0,001821379
6	8,42E-05	0,000443831	0,001859894	0,00182094
7	8,37E-05	0,000443285	0,001859486	0,001820528
8	8,31E-05	0,000442773	0,001859117	0,001820155
9	8,26E-05	0,000442294	0,001858779	0,001819813
10	8,21E-05	0,000441847	0,001858475	0,001819505
Rata-rata		0,000346681	0,001479628	0,001448462

Tabel 12. Perbandingan rata-rata galat *Recovered*

t	R_{eksak}	$error_{R_K}$	$error_{R_F}$	$error_{R_M}$
1	0,165819829	0,001581138	0,002316164	0,002308374
2	0,167744333	0,003143428	0,004613481	0,004597901
3	0,169650169	0,004687051	0,00689213	0,00686876
4	0,171537506	0,006212174	0,009152279	0,009121119
5	0,17340654	0,007718994	0,011394126	0,011355176
6	0,175257437	0,009553317	0,013228827	0,013189872
7	0,17709037	0,011369682	0,015045552	0,015006594
8	0,178905511	0,013168248	0,016844489	0,016805526
9	0,180703029	0,014949192	0,0186258	0,018586834
10	0,182482812	0,016712398	0,020389374	0,020350404
Rata-rata		0,008909562	0,011850222	0,011819056

Pembahasan

Hasil penelitian (Annas, *et al*, 2020) (Abdy, *et al*, 2021) (Side, *et al*, 2021) menunjukkan bahwa jumlah kasus Covid-19 di Indonesia terus meningkat dan vaksinasi dapat menurunkan jumlah kasus. Hasil ini sejalan dengan hasil simulasi yang diperoleh pada model matematika yang menunjukkan bahwa kasus Covid-19 dapat ditekan dengan vaksinasi. Hasil penelitian (Ramadhan, *et al*, 2021) menunjukkan bahwa solusi numerik pada penyakit tuberculosis dapat dilakukan dengan menggunakan metode RungeKutta, dan metode Runge Kutta orde-5 lebih akurat dari Runge Kutta orde-4. Sedangkan hasil penelitian ini menunjukkan bahwa metode RungeKutta Klasik lebih akurat dibandingkan dengan metode Runge Kutta Fehlberg dan Merson.

4. KESIMPULAN

Pada penelitian ini diperoleh bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik jika $R_0 \leq 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$ serta titik kesetimbangan endemik model matematika penyebaran Covid-19 stabil asimtotik dengan bilangan reproduksi dasar yaitu:

$$R_0 = \frac{\alpha\beta\mu}{(v + \mu)(\beta + \mu)(\gamma + \mu + \mu_i)}$$

Solusi numerik model menunjukkan metode Runge Kutta Klasik lebih baik dibandingkan metode Runge Kutta Fehlberg dan Runge Kutta Merson dalam memberikan solusi awal untuk metode Adams-Bashforth-Moulton pada model matematika penyebaran Covid-19. Metode Runge Kutta Klasik pada metode Adams-Bashforth-Moulton memberikan jumlah iterasi yang lebih sedikit dengan galat yang lebih kecil serta rata-rata galat pada metode Runge Kutta Klasik lebih kecil dibandingkan metode Runge Kutta Fehlberg maupun Runge Kutta Merson pada metode Adams-Bashforth-Moulton.

DAFTAR PUSTAKA

- Annas, S., Pratama, M. I., Rifandi, M., Sanusi, W., & Side, S. (2020). Stability analysis and numerical simulation of SEIR model for pandemic COVID-19 spread in Indonesia. *Chaos, solitons & fractals*, 139, 110072. 1-7. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110072>
- Anonim1. (2021). 5 Provinsi Penyumbang Kasus Positif COVID-19 Tertinggi per 13 Februari 2021. <https://www.liputan6.com/health/read/4482271/5-provinsi-penyumbang-kasus-positif-covid-19-tertinggi-per-13-februari-2021>. Diakses pada 20 Maret 2021

- Anonim2. (2021). Data Terkini Korban Virus Corona di Indonesia pada Maret 2021. <https://www.merdeka.com/peristiwa/data-terkini-korban-virus-corona-di-indonesia-pada-maret-2021.html>. Diakses pada 2 April 2021
- Apriadi, B. P., & Noviani, E. (2014). Metode Adams-Bashforth-Moulton dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial Non Linear. *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, 3(02). 107-116. <http://dx.doi.org/10.26418/bbimst.v3i02.6561>
- Kementerian Kesehatan Republik Indonesia (Kemenkes RI). (2020). *Pedoman Pencegahan dan Pengendalian Coronavirus Disease (Covid-19)*. Kemenkes: Jakarta.
- Kuzairi, K., Yulianto, T., & Safitri, L. (2016). Aplikasi Metode Adams Bashforth-Moulton (Abm) Pada Model Penyakit Kanker. *J Mat MANTIK*, 2, 14-21.
- Abdy, M., Side, S., Annas, S., Nur, W., & Sanusi, W. (2021). An SIR epidemic model for COVID-19 spread with fuzzy parameter: the case of Indonesia. *Advances in difference equations*, 2021, 1-17.
- Martha, A., & Agus Kadarmanto. (2022). ANALISIS KESALAHAN MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN SOALMATEMATIKA PADA MATERI FUNGSI POLINOMIAL. *Progresif : Media Publikasi Ilmiah*, 10(1), 1-8. Retrieved from <https://ejournal.unibo.ac.id/index.php/progresif/article/view/389>
- Makhlouf, A. M., El-Shennawy, L., & Elkaranshaw, H. A. (2020). Mathematical modelling for the role of CD4+ T cells in tumor-immune interactions. *Computational and mathematical methods in medicine*, 2020. 1-16.
- Mondal, S. P., Roy, S., Das, B., Mahata, A. 2017. Numerical So[7] Makhlouf, A. M., El-Shennawy, L., Hesham A. E. 2019. Mathematical Modelling for the Role of CD4+T Cells in Tumor Immune Interaction. *Hindawi (Computational and Mathematical Methoda in Medicine)*. Volume 2020, 1-16.
- Ramadhan, N. R., Minggu, I., & Side, S. (2021, June). The accuracy comparison of the RK-4 and RK-5 method of SEIR model for tuberculosis cases in South Sulawesi. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1918, No. 4, p. 042027). IOP Publishing. <https://10.1088/1742-6596/1918/4/042027>
- Sanusi, W., Badwi, N., Zaki, A., Sidjara, S., Sari, N., Pratama, M. I., & Side, S. (2021). Analysis and simulation of SIRS model for dengue fever transmission in South Sulawesi, Indonesia. *Journal of Applied Mathematics*, 2021, 1-8.
- Side, S., Irwan, I., Rifandi, M., Pratama, M., Ruliana, R., & Hamid, N. Z. (2022). Optimum Control of SEIR Model on COVID-19 Spread with Delay Time and Vaccination Effect in South Sulawesi Province. *Jurnal Varian*, 6(1), 11 - 24. <https://doi.org/https://doi.org/10.30812/varian.v6i1.1882>
- Side, S., Mahathir Hulinggi, P. K., Khatimah Syam, H., Irfan, M., Palarungi Taufik, A. G., & Side, S. (2021). The Effectiveness of Vaccination Against The Spread of COVID-19 with SEIR Mathematical Modeling in Gowa District. *Jurnal Varian*, 5(1), 17 - 28. <https://doi.org/https://doi.org/10.30812/varian.v5i1.1404>
- Rangkuti, Y. M., & Side, S. (2015). Pemodelan Matematika dan Solusi Numerik untuk Penularan Demam Berdarah. <http://digilib.unimed.ac.id/id/eprint/6051>
- Sanusi, W., Pratama, M. I., Rifandi, M., Sidjara, S., & Side, S. (2021, February). Numerical Solution of SIRS model for Dengue Fever Transmission in Makassar Citywith Runge Kutta Method. In *Journal of*

Physics: Conference Series (Vol. 1752, No. 1, p. 012004). IOP Publishing. <https://10.1088/1742-6596/1752/1/012004>

Wulandari, Y., Kiftiah, M., & Yudhi, Y. KONTROL OPTIMAL MODEL MANGSA PEMANGSA DENGAN PERTAHANAN PADA MANGSA. *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, 11(3). <http://dx.doi.org/10.26418/bbimst.v11i3.56043>

Zikri, F., Fajar, M. Y., & Gunawan, G. (2020, February). Penerapan Metode Runge-Kutta Fehlberg pada Model Sistem Pegas Massa Dua Derajat Kebebasan dengan Redaman. In *Prosiding SI MaNIs (Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai-Nilai Islami)* (Vol. 3, No. 1, pp. 230-238).