

# Analisis Model Dua Mangsa Satu Pemangsa dengan Pertahanan Kelompok dan Pemanenan Linear pada Mangsa

Fardinah\*<sup>1</sup>, Darma Ekawati<sup>2</sup>, Hikmah<sup>3</sup>, Ahmad Ansar<sup>4</sup>

<sup>1,2,3,4</sup>Universitas Sulawesi Barat

e-mail: \*<sup>1</sup>[fardinah@unsulbar.ac.id](mailto:fardinah@unsulbar.ac.id), <sup>2</sup>[darmaekawati@unsulbar.ac.id](mailto:darmaekawati@unsulbar.ac.id), <sup>3</sup>[hikmah@unsulbar.ac.id](mailto:hikmah@unsulbar.ac.id),  
<sup>4</sup>[ahmad.ansar@unsulbar.ac.id](mailto:ahmad.ansar@unsulbar.ac.id)

## Abstrak

*Dalam lingkungan mangsa pemangsa, terutama yang terdiri atas lebih dari satu spesies mangsa, terdapat beberapa perilaku pemangsa dalam berburu mangsa. Pada umumnya pemangsa lebih suka berburu di suatu habitat untuk beberapa waktu dan kemudian merubah kemauannya ke habitat lain. Situasi ini sangat berbeda ketika spesies mangsa terdiri dari individu-individu dalam jumlah yang lebih besar dan dengan ukuran tubuh yang lebih besar dari pemangsa serta memiliki kemampuan komunikasi untuk membentuk pertahanan kelompok sehingga mangsa tersebut dapat bertahan dan melawan pemangsa. Selain itu dapat juga dijumpai dalam suatu lingkungan bahwa terdapat spesies yang dapat dipanen untuk memenuhi kebutuhan manusia. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis kestabilan model dua mangsa satu pemangsa dengan pertahanan kelompok dan pemanenan linear pada mangsa yang terdiri dari tiga subpopulasi yaitu dua jenis spesies mangsa dan satu pemangsa. Jenis kestabilan ditentukan berdasarkan karakteristik nilai eigen yang diperoleh dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Dari penelitian ini diperoleh bahwa kepunahan subpopulasi pemangsa dan eksistensi semua subpopulasi dapat terjadi jika memenuhi kondisi yang disyaratkan*

**Kata kunci:** Model Mangsa Pemangsa, Pertahanan Kelompok, Pemanenan Linear, Kriteria Routh-Hurwitz

## 1. PENDAHULUAN

Model mangsa pemangsa pertama kali diperkenalkan oleh Alfred Lotka dan Vito Volterra pada tahun 1926 yang selanjutnya dikenal dengan model Lotka-Volterra. Dalam lingkungan mangsa pemangsa, terutama yang terdiri atas lebih dari satu spesies mangsa, terdapat beberapa perilaku pemangsa dalam berburu mangsa. Pada umumnya pemangsa lebih suka berburu di suatu habitat untuk beberapa waktu dan kemudian merubah kemauannya ke habitat lain. Salah satu alasan beralih dari pemangsa adalah semakin berkurangnya spesies mangsa di habitat pemangsa sedang mencari mangsa.

Situasi ini sangat berbeda ketika spesies mangsa terdiri dari individu-individu dalam jumlah yang lebih besar dan dengan ukuran tubuh yang lebih besar dari pemangsa. Selain itu, individu-individu mangsa tersebut juga memiliki kemampuan untuk berkomunikasi dan bekerjasama baik antar sesama mangsa maupun dengan mangsa dari spesies yang lain. Kemampuan berkomunikasi dan bekerjasama antar sesama mangsa sangat berguna dalam hal mendeteksi keberadaan dan pergerakan pemangsa serta untuk membentuk pertahanan kelompok sehingga mangsa tersebut dapat bertahan dan melawan pemangsa. Sedangkan kemampuan berkomunikasi dan bekerjasama dengan spesies mangsa lain sangat berguna ketika terjadi serangan oleh pemangsa maka mangsa dari spesies lain tersebut dapat membantu pertahanan kelompok dalam menghadapi pemangsa.

Dalam perkembangannya, model Lotka-Volterra ini kemudian mengalami banyak modifikasi. Pertumbuhan mangsa dan pemangsa menggunakan fungsi yang lebih kompleks seperti fungsi logistik dimana pertumbuhan mangsa dibatasi oleh kapasitas batas lingkungan. Selain bentuk interaksi antara mangsa dan pemangsa yang dikenal dengan fungsi respon juga mengalami perkembangan. Fungsi respon dalam

ekologi diartikan sebagai jumlah makanan yang dikonsumsi oleh pemangsa sebagai fungsi kepadatan makanan (Panja, et al., 2017). Tahun 1953 Holling memperkenalkan fungsi respon yang dikenal sebagai fungsi respon Holling tipe I, tipe II dan tipe III (Mortoja, et al., 2018). Salah satu fungsi respon yang sering digunakan adalah fungsi respon Holling Tipe II khususnya fungsi respon yang hanya bergantung pada populasi mangsa.

Disamping itu, model mangsa pemangsa juga dikembangkan dengan penelitian model interaksi antara lebih dari satu mangsa dengan pemangsa. Penelitian tersebut salah satunya dilakukan oleh Tansky (Q.J.A Khan, 2001) yang meneliti model matematika dari sistem dua mangsa dan satu pemangsa dengan sifat pemangsa yang beralih. Penelitian lain dilakukan oleh Freedman dan Wolkowicz (Q.J.A Khan, 2001) yang mengembangkan dengan kasus mangsa memiliki pertahanan kelompok yaitu dengan memberikan fungsi mekanisme peralihan pemangsa. Selain itu, model mangsa pemangsa juga dikembangkan dengan melakukan pemanenan pada populasi mangsa atau pemangsa. Penelitian ini diantaranya telah dilakukan oleh Benjamin Leard, dkk (2008) yang telah mempelajari dinamika populasi dengan pemanenan dari satu atau beberapa spesies sehingga dihasilkan berbagai model matematika dengan melibatkan pemanenan pada satu atau beberapa spesies populasi.

Artikel ini mengkaji kembali model yang telah dipaparkan oleh Q.J.A Khan (2001) dan memodifikasi model tersebut dengan menambahkan pemanenan pada populasi mangsa. Meskipun modifikasi yang dilakukan tidak terlalu signifikan namun hasil analisis memperlihatkan bahwa terjadi perubahan signifikan pada dinamika dari model dibandingkan model rujukan.

## 2. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur dengan prosedur penelitian diberikan sebagai berikut:

1. Membangun model berdasarkan asumsi yang diperoleh dari literatur yang telah dikaji
2. Menentukan titik kesetimbangan model
3. Menganalisis titik kesetimbangan model
4. Melakukan simulasi model

## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

### 3.1 Pembentukan Model Dua Mangsa Satu Pemangsa dengan Pemanenan Linear pada Mangsa

Dalam pembentukan model dua mangsa satu pemangsa dengan pemanenan linear pada mangsa diperlukan asumsi-asumsi yang berlaku dalam ekosistemnya. Asumsi-asumsi tersebut diberikan sebagai berikut:

#### 3.1.1. Asumsi Model

Dalam pembentukan model dua mangsa satu pemangsa dengan pemanenan linear pada mangsa, ekosistemnya dianggap memenuhi asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Terdapat tiga spesies yaitu mangsa  $x_1$ , mangsa  $x_2$  dan pemangsa  $y$  dengan mangsa  $x_1$  dan mangsa  $x_2$  tersebut hidup di lingkungan berbeda dan memiliki ukuran tubuh yang lebih besar dari pemangsa.
2. Dalam keadaan tanpa pemangsa, populasi mangsa tumbuh secara logistik.
3. Mangsa memiliki makanan yang cukup.
4. Mangsa dapat berpindah diantara dua lingkungan mangsa.
5. Laju kematian pemangsa konstan dan mangsa merupakan makanan utama bagi pemangsa.
6. Mangsa  $x_1$  dan mangsa  $x_2$  memiliki kemampuan berkomunikasi dan bekerjasama antar sesama mangsa dalam membentuk pertahanan kelompok. Pertahanan kelompok ini sangat berguna dalam mendeteksi keberadaan pemangsa dan melakukan perlawanan terhadap pemangsa.
7. Fungsi respon yang digunakan adalah fungsi respon Holling Tipe II

8. Pemanenan hanya dilakukan pada mangsa  $x_1$  dengan laju pemanenan linear.

### 3.1.2. Model Dasar Mangsa Pemangsa Lotka Volterra

Model dalam penelitian ini dibentuk dari model dasar mangsa pemangsa yaitu model Lotka Volterra yaitu,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= gx - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} &= \delta \beta xy - \mu y, \end{aligned} \quad (1)$$

dengan  $x$  adalah kepadatan populasi mangsa,  $y$  adalah kepadatan populasi pemangsa,  $g$  adalah koefisien kelahiran mangsa,  $\beta$  adalah koefisien pemangsaan,  $\mu$  koefisien kematian pemangsa, dan  $\delta$  koefisien konversi mangsa ke pemangsa.

Populasi mangsa tidak selamanya meningkat tetapi dapat terjadi jika subpopulasi naik maka angka pertumbuhan cenderung turun. Bahkan untuk subpopulasi yang cukup besar, bukan mustahil angka pertumbuhan negatif. Fenomena ini disebabkan area dan fasilitas hidup terbatas. Oleh karena itu, persamaan (1) kurang relevan karena populasi mangsa tidak selamanya naik atau turun. Populasi mangsa memiliki kapasitas batas lingkungan (disimbolkan  $k$ ) Jika populasi mangsa meningkat maka daya tampung atau kapasitas batas akan berkurang (disimbolkan  $k - x$ ). Akibatnya, masih tersisa  $\frac{k-x}{k}$  atau  $1 - \frac{x}{k}$  bagian kapasitas lingkungan. Oleh karena itu, pertumbuhan populasi mangsa akan berbanding lurus dengan sisa kapasitas lingkungan, sehingga diperoleh persamaan:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= gx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} &= \delta \beta xy - \mu y \end{aligned} \quad (2)$$

### 3.1.3. Modifikasi Model Dasar Mangsa Pemangsa Lotka Volterra menjadi Model Dua Mangsa Satu Pemangsa

Berdasarkan asumsi (4) pada pembahasan (3.1.1) diperoleh bahwa angka pertumbuhan populasi mangsa  $x_1$  bertambah dengan adanya perpindahan mangsa  $x_2$  dan angka pertumbuhan populasi mangsa  $x_2$  bertambah dengan adanya perpindahan mangsa  $x_1$ .

Perpindahan mangsa  $x_2$  ke lingkungan  $x_1$  dipengaruhi oleh koefisien perpindahan  $x_2$  (disimbolkan  $e_2$ ) dan peluang kesuksesan perpindahan  $x_2$  (disimbolkan  $p_{21}$ ). Dengan demikian pertambahan mangsa  $x_1$  adalah jumlah mangsa  $x_2$  yang pindah yaitu  $e_2 p_{21} x_2$ . Dengan prinsip yang sama diperoleh pertambahan mangsa  $x_2$  adalah jumlah mangsa  $x_1$  yang pindah yaitu  $e_1 p_{12} x_1$ .

Substitusi  $e_2 p_{21} x_2$  dan  $e_1 p_{12} x_1$  ke persamaan (2) diperoleh model dua mangsa satu pemangsa sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 g_1 \left(1 - \frac{x_1}{k_1}\right) + e_2 p_{21} x_2 - \beta_1 x_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2 g_2 \left(1 - \frac{x_2}{k_2}\right) + e_1 p_{12} x_1 - \beta_2 x_1 x_2 \\ \frac{dy}{dt} &= \delta_1 \beta_1 x_1 y + \delta_2 \beta_2 x_2 y - \mu y. \end{aligned} \quad (3)$$

### 3.1.4. Modifikasi Model Dua Mangsa – Satu Pemangsa menjadi Model Dua Mangsa Satu Pemangsa dengan Pertahanan Kelompok dan Pemanenan Linear pada Mangsa

Berdasarkan asumsi (6) diperoleh fungsi pemangsaan  $H(x) = \frac{\beta x}{1 + \beta t_h x}$ . Dalam hal ini diasumsikan koefisien pemangsaan yaitu  $\beta$  dan waktu yang dibutuhkan untuk mengkonsumsi mangsa yaitu  $t_h$  berbanding terbalik yang dapat dituliskan sebagai  $\beta = \frac{1}{t_h}$  sehingga diperoleh  $\beta t_h = 1$ , sehingga peroleh

fungsi respon untuk mangsa  $x_1$  yaitu  $H(x_1) = \frac{\beta x_1}{1+x_1}$  dan fungsi respon untuk mangsa  $x_2$  yaitu  $H(x_2) = \frac{\beta x_2}{1+x_2}$ .

Fakta menunjukkan bahwa fungsi respon untuk mangsa  $x_1$  juga bergantung pada mangsa  $x_2$  dan fungsi respon untuk mangsa  $x_2$  juga bergantung pada mangsa  $x_1$  ketika pemangsa mencari makan.

Dengan demikian diperoleh fungsi pemangsaan untuk mangsa  $x_1$  yaitu:

$$H\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{\beta_1 \left(\frac{x_1}{x_2}\right) x_2 y}{1 + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)} \text{ atau } H\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{\beta_1 x_1 x_2 y}{x_1 + x_2}$$

dan fungsi pemangsaan untuk mangsa  $x_2$  yaitu:

$$H\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{\beta_2 \left(\frac{x_2}{x_1}\right) x_1 y}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)} \text{ atau } H\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{\beta_2 x_1 x_2 y}{x_1 + x_2}$$

Berdasarkan asumsi (7) diperoleh bahwa angka pertumbuhan populasi mangsa  $x_1$  berkurang dengan adanya pemanenan linear pada mangsa  $x_1$ . Berkurangnya populasi mangsa  $x_1$  ini dipengaruhi oleh koefisien pemanenan (dilambangkan  $\hat{h}$ ). Dengan demikian mangsa  $x_1$  yang berkurang akibat pemanenan linear yaitu  $\hat{h}x_1$ .

Berdasarkan penjelasan di atas, diperoleh persamaan diferensial model dua mangsa satu pemangsa dengan pertahanan kelompok dan pemanenan linear pada mangsa  $x_1$  yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 g_1 \left(1 - \frac{x_1}{k_1}\right) + e_2 p_{21} x_2 - \frac{\beta_1 x_1 x_2 y}{x_1 + x_2} - \hat{h} x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2 g_2 \left(1 - \frac{x_2}{k_2}\right) + e_1 p_{12} x_1 - \frac{\beta_2 x_1 x_2 y}{x_1 + x_2} \\ \frac{dy}{dt} &= \left(-\mu + \frac{\delta_1 \beta_1 x_1 x_2}{x_1 + x_2} + \frac{\delta_2 \beta_2 x_1 x_2}{x_1 + x_2}\right) y, \end{aligned} \quad (4)$$

dengan:

$g_1$  : koefisien kelahiran mangsa  $x_1$

$g_2$  : koefisien kelahiran mangsa  $x_2$

$k_1$  : kapasitas batas lingkungan untuk mangsa  $x_1$

$k_2$  : kapasitas batas lingkungan untuk mangsa  $x_2$

$e_{1,2}$  : koefisien perpindahan mangsa  $x_1$  ke habitat  $x_2$

$e_{2,1}$  : koefisien perpindahan mangsa  $x_2$  ke habitat  $x_1$

$p_{1,2}$  : peluang kesuksesan peralihan mangsa  $x_1$  ke habitat  $x_2$

$p_{2,1}$  : peluang kesuksesan peralihan mangsa  $x_2$  ke habitat  $x_1$

$\beta_1$  : koefisien pemangsaan pada mangsa  $x_1$

$\beta_2$  : koefisien pemangsaan pada mangsa  $x_2$

$\delta_1$  : koefisien konversi mangsa  $x_1$  ke pemangsa

$\delta_2$  : koefisien konversi mangsa  $x_2$  ke pemangsa

$\mu$  : koefisien kematian pemangsa

$\hat{h}$  : koefisien pemanenan.

Koefisien  $g_1, g_2, k_1, k_2, e_{1,2}, e_{2,1}, p_{1,2}, p_{2,1}, \beta_1, \beta_2, \delta_1, \delta_2, \mu$  dan  $\hat{h}$  adalah konstanta-konstanta positif.

Dengan memisalkan  $g_1 = g, \beta_1 = \beta, e_1 p_{1,2} = e, e t = \tau, p_1 = \frac{g}{e}, \beta' = \frac{\beta}{e}, g_2 = g, \beta_2 = \beta, e_2 p_{2,1} = e, \beta_1 = \beta_2 = \beta, \delta_1 = \delta_2 = \delta, \mu_1 = \frac{\mu}{e}$  dan  $\delta' = 2\delta$  maka dari persamaan (4) diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= p_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k}\right) + x_2 - \frac{\beta' x_1 x_2 y}{x_1 + x_2} \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= p_1 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{k}\right) + x_1 - \frac{\beta' x_1 x_2 y}{x_1 + x_2} \\ \frac{dy}{d\tau} &= \left(-\mu_1 + \frac{\delta' \beta' x_1 x_2}{x_1 + x_2}\right) y. \end{aligned} \quad (5)$$

### 3.2. Kestabilan Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan persamaan (5) diperoleh berdasarkan (Verhulst, 1989) dengan menentukan solusi yang memenuhi  $\frac{dx_1}{d\tau} = 0$ ,  $\frac{dx_2}{d\tau} = 0$ , dan  $\frac{dy}{d\tau} = 0$ . Dari persamaan tersebut diperoleh titik kesetimbangan sebagai berikut:

- (i) Titik kesetimbangan  $E_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$  dengan  $\bar{x}_1 = -\bar{x}_2 p_1 \left(1 - \frac{\bar{x}_2}{k}\right)$  dan  $\bar{x}_2$  adalah solusi positif dari  $\frac{p_1^3}{k^3} x_2^3 - \frac{2p_1^3}{k^2} x_2^2 - \left(\frac{p_1^2}{k} - \frac{p_1^3}{k} - \frac{hp_1}{k}\right) x_2 - (-p_1^2 + hp_1 + 1) = 0$
- (ii) Titik kesetimbangan  $E_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y})$  dengan  $\bar{x}_1$  adalah solusi positif dari  $\beta'^2 \delta'^2 p_1 x_1^3 + (\beta'^2 \delta'^2 k - \beta'^2 \delta'^2 k p_1 - 2\beta' \delta' \mu_1 p_1 + \beta'^2 \delta'^2 k h) x_1^2 + (3\beta' \delta' k \mu_1 p_1 - 3\beta' \delta' k \mu_1 - 2\beta' \delta' k \mu_1 h) x_1 + 2k\mu_1^2 + kh\mu_1^2 - 2k\mu_1^2 p_1 = 0$ ,  $\bar{x}_2 = \frac{\mu_1 \bar{x}_1}{\delta' \beta' \bar{x}_1 - \mu_1}$  dan  $\bar{y} = \frac{\delta' \bar{x}_1}{\mu_1} \left( \frac{\mu_1 p_1}{\beta' \delta' \bar{x}_1 - \mu_1} - \frac{\mu_1^2 p_1 \bar{x}_1}{k(\beta' \delta' \bar{x}_1 - \mu_1)^2} + 1 \right)$ , dengan  $\bar{x}_1 > \frac{\mu_1}{\delta' \beta'}$ .

Selanjutnya akan dipelajari dinamika di sekitar titik-titik kesetimbangan tersebut. Untuk mengidentifikasi kestabilan lokal dari titik kesetimbangan, dilakukan pelinearan terhadap model (5) berdasarkan (Perko, 1991). Hasil pelinearan memberikan matriks Jacobian dari model (5) yaitu sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} p_1 - \frac{2p_1 x_1}{k} - \frac{\beta' x_2^2 y}{(x_1 + x_2)^2} - h & 1 - \frac{\beta' x_1^2 y}{(x_1 + x_2)^2} & -\frac{\beta' x_1 x_2}{x_1 + x_2} \\ 1 - \frac{\beta' x_2^2 y}{(x_1 + x_2)^2} & p_1 - \frac{2p_1 x_2}{k} - \frac{\beta' x_1^2 y}{(x_1 + x_2)^2} & -\frac{\beta' x_1 x_2}{x_1 + x_2} \\ \frac{\delta' \beta' x_2^2 y}{(x_1 + x_2)^2} & \frac{\delta' \beta' x_1^2 y}{(x_1 + x_2)^2} & -\mu_1 + \frac{\delta' \beta' x_1 x_2}{x_1 + x_2} \end{bmatrix}$$

Dengan mensubstitusi  $E_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$  ke matriks Jacobian J diperoleh:

$$J_1 = \begin{bmatrix} p_1 - \frac{2p_1 \bar{x}_1}{k} - h & 1 & -\frac{\beta' \bar{x}_1 \bar{x}_2}{\bar{x}_1 + \bar{x}_2} \\ 1 & p_1 - \frac{2p_1 \bar{x}_2}{k} & -\frac{\beta' \bar{x}_1 \bar{x}_2}{\bar{x}_1 + \bar{x}_2} \\ 0 & 0 & -\mu_1 + \frac{\delta' \beta' \bar{x}_1 \bar{x}_2}{\bar{x}_1 + \bar{x}_2} \end{bmatrix}$$

diperoleh persamaan karakteristik  $\lambda^2 + (2p_1 - \frac{2p_1}{k}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) - h)\lambda + (p_1 - \frac{2p_1 \bar{x}_1}{k} - h)(p_1 - \frac{2p_1 \bar{x}_2}{k}) = 0$ . Dengan kriteria Routh-Hurwitz (Gantmacher, 1959) diperoleh bahwa titik kesetimbangan  $E_1$  akan stabil dengan syarat  $\mu_1 > \frac{\delta' \beta' \bar{x}_1 \bar{x}_2}{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}$ ,  $h > 2p_1 - \frac{2p_1}{k}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$  dan  $(p_1 - \frac{2p_1 \bar{x}_1}{k} - h)(p_1 - \frac{2p_1 \bar{x}_2}{k}) > 0$ .

Dengan mensubstitusi  $E_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y})$  ke matriks Jacobian J diperoleh:

$$J_2 = \begin{bmatrix} M & 1 - B & -\frac{\mu_1}{\delta'} \\ 1 - C & L & -\frac{\mu_1}{\delta'} \\ \delta' C & \delta' B & 0 \end{bmatrix}$$

dengan:

$$L = p_1 - \frac{2\mu_1 p_1 \bar{x}_1}{k(\beta' \delta' \bar{x}_1 - \mu_1)} - \frac{(\beta' \delta' \bar{x}_1 - \mu_1)^2}{\beta' \delta' \mu_1 \bar{x}_1} \left( \frac{\mu_1 p_1}{\beta' \delta' \bar{x}_1 - \mu_1} - \frac{\mu_1^2 p_1 \bar{x}_1}{k(\beta' \delta' \bar{x}_1 - \mu_1)^2} + 1 \right)$$

$$M = p_1 - \frac{2p_1 \bar{x}_1}{k} - \frac{\mu_1}{\beta' \delta' \bar{x}_1} \left( \frac{\mu_1 p_1}{\beta' \delta' \bar{x}_1 - \mu_1} - \frac{\mu_1^2 p_1 \bar{x}_1}{k(\beta' \delta' \bar{x}_1 - \mu_1)^2} + 1 \right) - h$$

$$C = \frac{\mu_1}{\beta' \delta' \bar{x}_1} \left( \frac{\mu_1 p_1}{\beta' \delta' \bar{x}_1 - \mu_1} - \frac{\mu_1^2 p_1 \bar{x}_1}{k(\beta' \delta' \bar{x}_1 - \mu_1)^2} + 1 \right)$$

$$B = \frac{(\beta' \delta' \bar{x}_1 - \mu_1)^2}{\beta' \delta' \mu_1 \bar{x}_1} \left( \frac{\mu_1 p_1}{\beta' \delta' \bar{x}_1 - \mu_1} - \frac{\mu_1^2 p_1 \bar{x}_1}{k(\beta' \delta' \bar{x}_1 - \mu_1)^2} + 1 \right).$$

Diperoleh persamaan karakteristik  $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$  dengan  $a_1 = -L - M$ ,  $a_2 = LM + \mu_1C + \mu_1B - 1 + B + C - BC$  dan  $a_3 = \mu_1C + \mu_1B - \mu_1BM - \mu_1CL - 2\mu_1BC$ . Dengan kriteria Routh-Hurwitz diperoleh bahwa titik kesetimbangan  $E_2$  akan stabil dengan syarat dengan syarat  $-L > M$  dan  $LM + \mu_1C + \mu_1B - 1 + B + C - BC > 0$ .

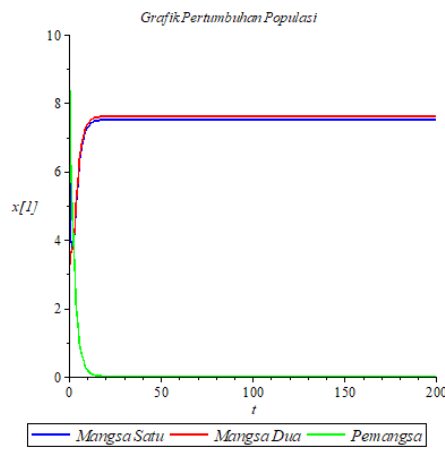
### 3.3. Simulasi Numerik

Untuk memperkuat hasil analisis yang diberikan sebelumnya, dilakukan simulasi numerik terhadap model (5). Karena keterbatasan data yang ada, pemilihan parameter disesuaikan dengan kondisi kestabilan yang diberikan pada hasil sebelumnya.

Simulasi titik kesetimbangan  $E_1$  dipilih parameter sebagai berikut.

$p = 0.1, k = 0.7, \beta = 0.2, \delta = 0.02, \mu = 0.4$  dan  $h = 0.04$

Diperoleh gambar sebagai berikut:



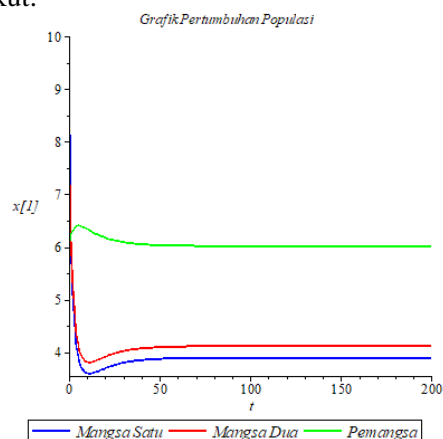
Gambar 1. Simulasi numerik disekitar titik kesetimbangan  $E_1$

Berdasarkan analisis kestabilan yang dilakukan sebelumnya diperoleh bahwa titik kesetimbangan  $E_1$  stabil asimtotik dengan syarat seperti yang telah disebutkan pada bagian 3.2. Dari gambar tersebut terlihat bahwa subpopulasi pemangsa menuju kepunahan sedangkan subpopulasi mangsa akan eksis.

Simulasi titik kesetimbangan  $E_2$  dipilih parameter sebagai berikut.

$p = 0.05, k = 0.5, \beta = 0.2, \delta = 0.1, \mu = 0.04$  dan  $h = 0.1$

Diperoleh gambar sebagai berikut:



Gambar 2. Simulasi numerik disekitar titik kesetimbangan  $E_2$

Berdasarkan analisis kestabilan yang dilakukan sebelumnya diperoleh bahwa titik kesetimbangan  $E_2$  stabil asimtotik dengan syarat seperti yang telah disebutkan pada bagian 3.2. Dari gambar tersebut terlihat bahwa kehidupan populasi akan eksis.

#### 4. KESIMPULAN

Model model dua mangsa satu pemangsa dengan pemanenan linear pada mangsa seperti ditunjukkan dalam model (4). Hasil analisis menunjukkan bahwa terdapat dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan kepunahan pemangsa dan titik kesetimbangan eksistensi semua subpopulasi. Dari analisis titik kesetimbangan yang dilakukan diperoleh bahwa kepunahan subpopulasi pemangsa dan eksistensi semua subpopulasi dapat terjadi jika memenuhi kondisi yang disyaratkan. Di akhir artikel telah ditunjukkan simulasi numerik berupa gambar deret waktu di sekitar setiap titik kesetimbangan serta interpretasi biologisnya.

#### DAFTAR PUSTAKA

- Benjamin, L., Catherine, L., & Jorge, R., 2008, Dynamics Of Ratio-Dependent Predator-Prey Models With Nonconstant Harvesting, Discrete And Continuous Dynamical Systems Series, Vol 1, pp. 303–315.
- Gantmacher, F. R., 1959, *Applications of The Theory of Matrices*, Intersciences Publishers, New-York, USA.
- Khan, Q.J.A. dan Balakrishnan, B., 2001, Analysis of a Predator – Prey System with Predator Switching, *Bulletin of Mathematical Biology*, Vol. 38 , pp. 449-458.
- Mortoja, S. G., Panja, P., & Mondal, S. K., 2018, Dynamics of a Predator-Prey Model with Stage Structure on Both Species and Anti-Predator Behavior, *Informatics in Medicine Unlocked*, Vol 10, pp. 50–57.
- Panja, P., Mondal, S. K., & Chattopadhyay, J., 2017, Dynamical Effects of Anti-predator Behaviour of Adult Prey in a Predator-Prey Model with Ratio-Dependent Functional Response, *Asian Journal of Mathematics and Physics*, Vol 1, pp. 19–32.
- Perko, L., 1991, *Differential Equation and Dynamical System*, New York, SpringerVerlag Berlin Heidelberg.
- Verhulst, F., 1990, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer – Verlag, New- York, USA.