

Solusi Numerik Model Matematika SHEIR pada Penyebaran Penyakit Campak dengan Vaksinasi dan Kekebalan Kelompok

Darmawati*¹, Masyita Haerianti², Wahyudin Nur³, Magfirah⁴
^{1,3,4}Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Sulawesi Barat
²Program Studi Keperawatan, FIKES, Universitas Sulawesi Barat

e-mail: * darmath@unsulbar.ac.id

Abstract

In this paper, mathematical model of measles transmission dynamics considering vaccination and herd immunity is discussed. The solution of the model is investigated using euler, atangana, dan nonstandard finite difference method. After comparing the solutions of the model, we observe that the solutions obtained by using euler and atangana method diverge for certain step. On the other hand, the solutions obtained by using nonstandard finite difference always converge.

Keywords: Numerical schemes, Euler method, Atangana method, Nonstandard finite difference method

1. PENDAHULUAN

Penyakit campak adalah penyakit menular yang diakibatkan oleh virus *measles* (Moss 2017). Penyebarannya melalui droplet dan partikel penularnya dapat bertahan sampai dua jam (Paules, Marston, & Fauci 2019). Sebelum vaksin campak diperkenalkan, penyakit ini menyebabkan sekitar 2 juta kematian per tahun. Setelah adanya vaksinasi, angka kematian dapat ditekan menjadi sekitar 100 ribu per tahun (Moss 2017). Vaksinasi dianggap sebagai metode terbaik untuk mengendalikan penyebaran penyakit campak (Paules, Marston, & Fauci 201). Meskipun demikian, masih banyak masyarakat yang tidak mengikuti program vaksinasi. Beberapa model matematika telah membahas masalah vaksinasi dan penyakit campak (Edward 2015)(J. M. & R. I. 2014). Model tersebut merupakan system persamaan diferensial biasa. Beberapa skema numerik dapat digunakan untuk menentukan solusi numerik model yang dinyatakan dalam system persamaan diferensial biasa. Kita dapat menggunakan metode runge kutta, euler, milne simpson, beda hingga tak standar. Pada tahun, Atangana memperkenalkan sebuah metode baru (Atangana & İğret Araz 2020). Dalam artikel ini, kami membandingkan beberapa skema numerik yang digunakan untuk menentukan solusi numerik model. Model tersebut adalah metode euler, metode beda hingga tak standar, dan metode Atangana.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini adalah penelitian studi literatur. Berikut merupakan tahapan penelitian yang dilakukan:

- Membangun model matematika
- Menentukan titik kesetimbangan model
- Menentukan bilangan reproduksi dasar
- Menentukan diskritisasi model sesuai metode yang digunakan
- Membuat program dan melakukan simulasi numerik
- Membandingkan hasil ketiga metode

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dari hasil penelusuran literatur, diperoleh masalah nyata dan fakta-fakta penyakit Campak. Berdasarkan informasi tersebut, dibangunlah model matematika sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS_h}{dt} &= (1 - \kappa\phi_n)\rho_H\Lambda - \beta S_h I - (\mu + \kappa\phi_s)S_h, \\ \frac{dE}{dt} &= \beta S_h I - (\mu + \sigma)E, \\ \frac{dI}{dt} &= \sigma E - (\mu + \omega)I, \\ \frac{dR}{dt} &= \kappa\phi_n(1 - \rho_H)\Lambda + \omega I - \mu R + \kappa\phi_s S_h.\end{aligned}\tag{1}$$

dimana:

- S_H = Manusia rentan yang dapat terinfeksi dan mengandalkan *Herd Immunity* (anti-vaksin)
- E = Manusia yang terekspos penyakit campak
- I = Manusia yang terinfeksi dan mampu menularkan penyakit campak
- R = Manusia yang sudah kebal terhadap penyakit campak
- ρ_H = Proporsi masyarakat yang terpapar paham anti-vaksin
- Λ = Rekrutmen manusia sehat
- μ = Laju kematian alami
- κ = Efektifitas edukasi
- ϕ_s = Proporsi S_H yang mendapat edukasi
- ϕ_n = Proporsi masyarakat umum yang mendapat edukasi
- σ = Laju transisi E ke I
- ω = Laju kesembuhan.

Dengan menyelesaikan persamaan diferensial di atas, diperoleh titik setimbang model untuk *Disease Free Equilibrium (DFE)* yaitu:

$$\begin{aligned}S_H^* &= \frac{\rho_H\Lambda(1 - \kappa\phi_n)}{\mu + \kappa\phi_s} \\ E^* &= 0 \\ I^* &= 0 \\ R^* &= \frac{\kappa\phi_n((1 - \rho_H)\Lambda(\mu + \kappa\phi_s)) + (\rho_H\Lambda(1 - \kappa\phi_n))}{\mu(\mu + \kappa\phi_s)}.\end{aligned}$$

Dari hasil ini, selanjutnya digunakan *Matrix Next Generation (NGM)* untuk mendapatkan nilai R_0 model. Diperoleh:

$$R_0 = \frac{\beta\sigma\rho_H\Lambda(1 - \kappa\phi_n)}{(\mu + \kappa\phi_s)(\mu + \sigma)(\mu + \omega)}.$$

Selanjutnya melakukan diskritisasi model.

3.1 Metode Euler

Berdasarkan model (1), kita memperoleh sistem berikut:

$$\begin{aligned}\frac{S_h^{(j+1)} - S_h^{(j)}}{w} &= (1 - \kappa\phi_n)\rho_H\Lambda - \beta S_h^{(j)}I^{(j)} - (\mu + \kappa\phi_s)S_h^{(j)}, \\ \frac{E^{(j+1)} - E^{(j)}}{w} &= \beta S_h^{(j)}I^{(j)} - (\mu + \sigma)E^{(j)}, \\ \frac{I^{(j+1)} - I^{(j)}}{w} &= \sigma E^{(j)} - (\mu + \omega)I^{(j)}, \\ \frac{I^{(j+1)} - I^{(j)}}{w} &= \kappa\phi_n(1 - \rho_H)\Lambda + \omega I^{(j)} - \mu R^{(j)} + \kappa\phi_s S_h^{(j)}.\end{aligned}\tag{2}$$

Dengan w adalah lebar langkah. Selanjutnya kita mengumpulkan suku yang memiliki indeks $(j+1)$ dan diperoleh hasil diskritisasi berikut:

$$\begin{aligned} S_h^{(j+1)} &= S_h^{(j)} + w\left((1-\kappa\phi_n)\rho_h\Lambda - \beta S_h^{(j)}I^{(j)} - (\mu + \kappa\phi_s)S_h^{(j)}\right), \\ E^{(j+1)} &= E^{(j)} + w\left(\beta S_h^{(j)}I - (\mu + \sigma)E^{(j)}\right), \\ I^{(j+1)} &= I^{(j)} + w\left(\sigma E^{(j)} - (\mu + \omega)I^{(j)}\right), \\ R^{(j+1)} &= R^{(j)} + w\left(\kappa\phi_n(1-\rho_h)\Lambda + \omega I^{(j)} - \mu R^{(j)} + \kappa\phi_s S_h^{(j)}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

3.2 Metode Atangana

Metode ini adalah metode yang baru diperkenalkan pada tahun 2020. Berbeda dengan metode Euler yang termasuk metode satu langkah, metode ini termasuk metode banyak langkah karena memerlukan beberapa solusi sebelumnya untuk menentukan solusi selanjutnya. Metode Atangana memerlukan tiga solusi sebelumnya untuk menentukan solusi selanjutnya. Kami menggunakan metode Euler untuk menentukan semua nilai awal metode Atangana Berikut merupakan hasil diskritisasi model (1) dengan menggunakan metode Atangana:

Untuk $j=0$ dan $j=1$

$$\begin{aligned} S_h^{(j+1)} &= S_h^{(j)} + w\left((1-\kappa\phi_n)\rho_h\Lambda - \beta S_h^{(j)}I^{(j)} - (\mu + \kappa\phi_s)S_h^{(j)}\right), \\ E^{(j+1)} &= E^{(j)} + w\left(\beta S_h^{(j)}I - (\mu + \sigma)E^{(j)}\right), \\ I^{(j+1)} &= I^{(j)} + w\left(\sigma E^{(j)} - (\mu + \omega)I^{(j)}\right), \\ R^{(j+1)} &= R^{(j)} + w\left(\kappa\phi_n(1-\rho_h)\Lambda + \omega I^{(j)} - \mu R^{(j)} + \kappa\phi_s S_h^{(j)}\right). \end{aligned}$$

Untuk $j=2,3,\dots,j_{\max}$

$$\begin{aligned} S_h^{(j+1)} &= S_h^{(j)} + \frac{5}{12}\left[w\left((1-\kappa\phi_n)\rho_h\Lambda - \beta S_h^{(j-2)}I^{(j-2)} - (\mu + \kappa\phi_s)S_h^{(j-2)}\right)\right] + \\ &\quad \frac{4}{3}\left[w\left((1-\kappa\phi_n)\rho_h\Lambda - \beta S_h^{(j-1)}I^{(j-1)} - (\mu + \kappa\phi_s)S_h^{(j-1)}\right)\right] + \\ &\quad \frac{23}{12}\left[w\left((1-\kappa\phi_n)\rho_h\Lambda - \beta S_h^{(j)}I^{(j)} - (\mu + \kappa\phi_s)S_h^{(j)}\right)\right] \\ E^{(j+1)} &= E^{(j)} + \frac{5}{12}\left[w\left(\beta S_h^{(j-2)}I - (\mu + \sigma)E^{(j-2)}\right)\right] + \\ &\quad \frac{4}{3}\left[w\left(\beta S_h^{(j-1)}I - (\mu + \sigma)E^{(j-1)}\right)\right] + \\ &\quad \frac{23}{12}\left[w\left(\beta S_h^{(j)}I - (\mu + \sigma)E^{(j)}\right)\right] \\ I^{(j+1)} &= I^{(j)} + \frac{5}{12}\left[w\left(\sigma E^{(j-2)} - (\mu + \omega)I^{(j-2)}\right)\right] + \\ &\quad \frac{4}{3}\left[w\left(\sigma E^{(j-1)} - (\mu + \omega)I^{(j-1)}\right)\right] + \\ &\quad \frac{23}{12}\left[w\left(\sigma E^{(j)} - (\mu + \omega)I^{(j)}\right)\right] \\ R^{(j+1)} &= R^{(j)} + \frac{5}{12}\left[w\left(\kappa\phi_n(1-\rho_h)\Lambda + \omega I^{(j-2)} - \mu R^{(j-2)} + \kappa\phi_s S_h^{(j-2)}\right)\right] + \\ &\quad \frac{4}{3}\left[w\left(\kappa\phi_n(1-\rho_h)\Lambda + \omega I^{(j-1)} - \mu R^{(j-1)} + \kappa\phi_s S_h^{(j-1)}\right)\right] + \\ &\quad \frac{23}{12}\left[w\left(\kappa\phi_n(1-\rho_h)\Lambda + \omega I^{(j)} - \mu R^{(j)} + \kappa\phi_s S_h^{(j)}\right)\right]. \end{aligned} \quad (4)$$

3.3 Metode beda hingga tak standar

Berdasarkan model (1), kami memperoleh

$$\begin{aligned} \frac{S_h^{(j+1)} - S_h^{(j)}}{\zeta(w)} &= (1 - \kappa\phi_n)\rho_h\Lambda - \beta S_h^{(j+1)}I^{(j)} - (\mu + \kappa\phi_s)S_h^{(j+1)}, \\ \frac{E^{(j+1)} - E^{(j)}}{\zeta(w)} &= \beta S_h^{(j+1)}I^{(j)} - (\mu + \sigma)E^{(j+1)}, \\ \frac{I^{(j+1)} - I^{(j)}}{\zeta(w)} &= \sigma E^{(j+1)} - (\mu + \omega)I^{(j+1)}, \\ \frac{R^{(j+1)} - R^{(j)}}{\zeta(w)} &= \kappa\phi_n(1 - \rho_h)\Lambda + \omega I^{(j+1)} - \mu R^{(j+1)} + \kappa\phi_s S_h^{(j+1)}. \end{aligned}$$

Setelah melakukan penyusunan kembali, diperoleh hasil diskritisasi berikut:

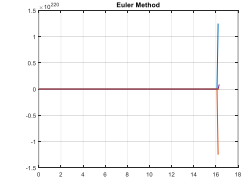
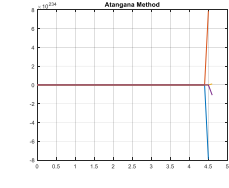
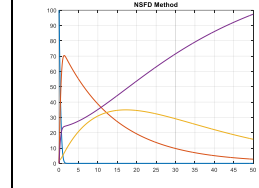
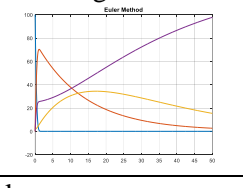
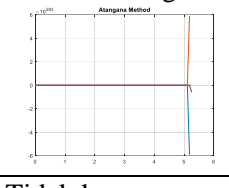
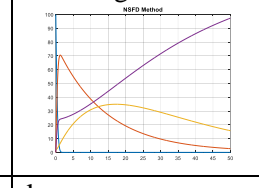
$$\begin{aligned} S_h^{(j+1)} &= \frac{\zeta(w)(1 - \kappa\phi_n)\rho_h\Lambda + S_h^{(j)}}{1 + \beta I^{(j)}\zeta(w) + (\mu + \kappa\phi_s)\zeta(w)}, \\ E^{(j+1)} &= \frac{\zeta(w)\beta S_h^{(j+1)}I^{(j)} + E^{(j)}}{1 + \zeta(w)(\mu + \sigma)}, \\ I^{(j+1)} &= \frac{I^{(j)} + \zeta(w)\sigma E^{(j+1)}}{1 + \zeta(w)(\mu + \omega)}, \\ R^{(j+1)} &= \frac{\kappa\phi_n(1 - \rho_h)\Lambda\zeta(w) + \omega I^{(j+1)}\zeta(w) + \zeta(w)\kappa\phi_s S_h^{(j+1)} + R^{(j)}}{1 + \mu\zeta(w)}, \end{aligned}$$

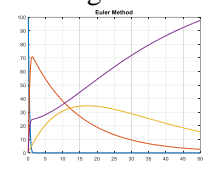
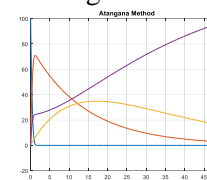
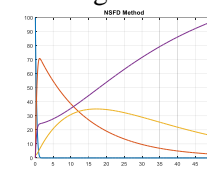
dengan

$$\zeta(w) = \frac{e^{\mu w} - 1}{\mu}.$$

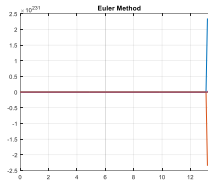
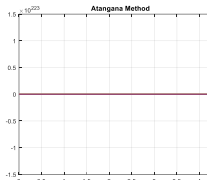
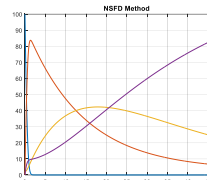
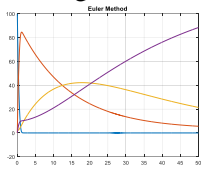
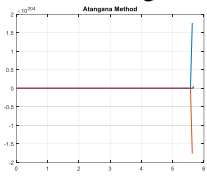
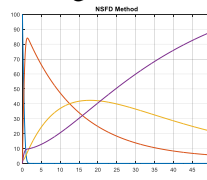
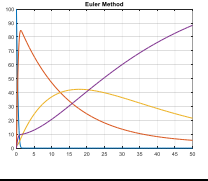
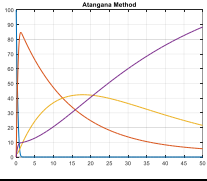
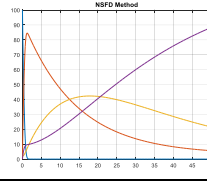
Hasil simulasi numerik dengan menggunakan ketiga skema numerik di atas disajikan dalam tabel berikut.

- Untuk $R_0 < 1$

Step	Metode Euler	Metode Atangana	Metode NSFD
0.1	Tidak konvergen 	Tidak konvergen 	Konvergen 
0.09	Tidak konvergen	Tidak konvergen	konvergen
0.08	Tidak konvergen	Tidak konvergen	konvergen
0.072	Konvergen 	Tidak konvergen 	Konvergen 
0.07	konvergen	Tidak konvergen	konvergen
0.06	konvergen	Tidak konvergen	konvergen

0.0184	Konvergen 	Konvergen 	Konvergen 
0.018	konvergen	konvergen	konvergen
0.01	konvergen	konvergen	konvergen
0.009	konvergen	konvergen	konvergen

- Untuk $R_0 > 1$

Step	Metode Euler	Metode Atangana	Metode NSFD
0.1	Tidak konvergen 	Tidak konvergen 	Konvergen 
0.09	Tidak konvergen	Tidak konvergen	konvergen
0.08	Tidak konvergen	Tidak konvergen	konvergen
0.07	Tidak Konvergen	Tidak konvergen	konvergen
0.06	Tidak Konvergen	Tidak konvergen	konvergen
0.058	Konvergen 	Tidak konvergen 	konvergen 
0.05	konvergen	Tidak konvergen	konvergen
0.015	Konvergen 	Konvergen 	Konvergen 
0.01	konvergen	konvergen	konvergen
0.009	konvergen	konvergen	konvergen

Dari hasil simulasi di atas, dapat dilihat bahwa metode yang paling baik untuk mempelajari solusi numerik suatu model adalah dengan metode NSFD, karena metode ini selalu konvergen. Dua metode lainnya hanya konvergen pada *step* tertentu.

4. KESIMPULAN

Metode-metode yang dibandingkan, semuanya dapat digunakan pada model epidemic. Akan tetapi dari 3 (tiga) metode yang dibandingkan, Metode NSFD memberikan hasil yang jauh lebih baik karena metode ini selalu konvergen.

DAFTAR PUSTAKA

- Atangana A., İğret Araz S. 2020 New numerical method for ordinary differential equations: Newton polynomial. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **372**, 112622. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112622>
- Edward S. 2015 A Mathematical Model for Control and Elimination of the Transmission Dynamics of Measles. *Applied and Computational Mathematics*, **4**(6), 396. <https://doi.org/10.11648/j.acm.20150406.12>
- J. M. O., R. I. G. 2014 A Mathematical Model of Measles with Vaccination and Two Phases of Infectiousness. *IOSR Journal of Mathematics*, **10**(1), 95–105. <https://doi.org/10.9790/5728-101495105>
- Moss W. J. 2017 Measles. *The Lancet*, **390**(10111), 2490–2502. [https://doi.org/10.1016/S0140-6736\(17\)31463-0](https://doi.org/10.1016/S0140-6736(17)31463-0)
- Paules C. I., Marston H. D., Fauci A. S. 2019 Measles in 2019 — Going Backward. *New England Journal of Medicine*, **380**(23), 2185–2187. <https://doi.org/10.1056/NEJMp1905099>