Bilangan Terhubung-Total Pelangi untuk Beberapa Graf Amalgamasi

Arbain
Universitas Sembilanbelas November Kolaka
email: arbaindjingga@gmail.com

Abstrak

Semua graf yang dikaji pada tesis ini adalah graf hingga, sederhana, dan tak berarah. Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah graf terhubung tak trivial. Fungsi $c : V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$ dikatakan pewarnaan-k-total pelangi pada G, jika untuk setiap dua titik x dan y di $V(G)$ terdapat lintasan $x - y$ dengan setiap sisi dan titik dalam pada lintasan tersebut memperoleh warna berbeda. Lintasan yang seperti itu dinamakan lintasan-total pelangi. Graf G disebut terhubung-total pelangi jika untuk setiap dua titik x dan y di $V(G)$ terdapat lintasan-total pelangi $x - y$. Bilangan terhubung-total pelangi dinotasikan dengan $trc(G)$, didefinisikan sebagai banyak warna minimal yang dibutuhkan untuk membuat graf G bersifat terhubung-total pelangi. Misalkan t adalah bilangan asli dengan $t \geq 2$. Misalkan $\{G_i \mid i \in [1, t]\}$ adalah koleksi berhingga graf terhubung tak trivial dan setiap G_i mempunyai titik tetap v_{0i}. Graf amalgamasi G_i dinotasikan dengan $Amal(G_i, v_{0i}, t)$ adalah graf yang dibentuk dengan merekatkan semua graf G_i pada titik v_{0i}. Titik v_{0i} disebut sebagai titik terminal. Dalam tesis ini ditentukan batas bawah dan batas atas bilangan terhubung-total pelangi untuk graf amalgamasi. Selanjutnya ditentukan bilangan terhubung-total pelangi graf amalgamasi tertentu, yakni graf pohon dan lengkap.

Kata kunci*: graf amalgamasi, terhubung-total pelangi.*

1. PENDAHULUAN

Konsep dari keterhubungan pelangi pada graf pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk. pada tahun 2008 dikutip dari Chartrand, G dkk (2008). Sejak pertama kali diperkenalkan, konsep keterhubungan pelangi mengalami perkembangan. Konsep ini telah menarik perhatian dan hingga kini telah banyak makalah yang dipublikasikan terkait hal ini. Misalkan $G = \left(V(G), E(G)\right)$ adalah graf terhubung tak trivial. Didefinisikan suatu pewarnaan $c : E(G) \to \{1, 2 \ldots, k\}$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$ dikatakan pewarnaan-k pelangi pada G, jika untuk setiap pasang titik $x, y \in V(G)$ terdapat suatu lintasan $x - y$ yang setiap sisinya memperoleh warna berbeda. Lintasan tersebut dinamakan lintasan pelangi. Graf G dikatakan terhubung pelangi, jika untuk setiap pasang titik $x, y \in V(G)$ terdapat lintasan pelangi $x - y$. Bilangan terhubung pelangi graf G, dinotasikan dengan $rc(G)$ adalah banyak warna minimal yang dibutuhkan sehingga G bersifat terhubung pelangi.

Parameter graf yang telah dijelaskan oleh Chartrand dkk. didefiniskan untuk pewarnaan sisi pada graf. Krivelevich dan Yuster (2010) dalam Krivelevich, M. dan

Yuster, R. (2010) memperkenalkan parameter baru yang berhubungan dengan bilangan terhubung pelangi yang didefinisikan untuk pewarnaan titik pada graf. Suatu pewarnaan $c : V(G) \rightarrow \{1, 2 \ldots, k\}$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$ disebut pewarnaan-k-titik pelangi pada G, jika untuk setiap pasang titik $x, y \in V(G)$ terdapat suatu lintasan $x - y$ dengan setiap titik dalam pada lintasan tersebut memperoleh warna berbeda. Lintasan yang seperti itu dinamakan lintasan-titik pelangi . Graf G dikatakan terhubung-titik pelangi, jika untuk setiap pasang titik $x, y \in V(G)$ terdapat lintasan-titik pelangi $x - y$. Bilangan terhubung-titik pelangi graf G, dinotasikan dengan $rvc(G)$ adalah banyak warna minimal yang dibutuhkan sehingga G bersifat terhubung-titik pelangi.

Uchizawa dkk (2011) memperkenalkan varian lain dari konsep keterhubungan pelangi, yaitu terhubung-total pelangi. Misalkan k adalah bilangan asli. Fungsi $c : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2 \ldots, k\}$ dikatakan pewarnaan- k-total pelangi pada G, jika untuk setiap pasang titik $x, y \in V(G)$ terdapat lintasan $x - y$ dengan setiap sisi dan setiap titik dalam pada lintasan tersebut memperoleh warna berbeda. Lintasan yang seperti itu dinamakan lintasan-total pelangi. Graf G disebut terhubung-total pelangi jika untuk setiap pasang titik $x, y \in V(G)$ terdapat lintasan-total pelangi $x - y$. Bilangan terhubung-total pelangi dinotasikan dengan $trc(G)$, didefinisikan sebagai banyak warna minimal yang dibutuhkan untuk membuat graf G bersifat terhubung-total pelangi.

Sun (2013) dan Liu dkk (2014) juga melakukan penyelidikan terkait konsep ini dan memperoleh hasil berikut.

Lemma 1.1 (Liu, 2014). *Misalkan G graf terhubung tak trivial berorde n dan berdiameter* $diam(G)$, *maka*

a. $trc(G) = 1 \Leftrightarrow G$ adalah graf lengkap;
b. $2diam(G) - 1 \leq trc(G) \leq 2n - 3$.

Proposisi 1.2 (Liu, 2014). *Jika G graf terhubung berorde n dengan q titik mempunyai derajat paling sedikit* 2, *maka* $trc(G) \leq n - 1 + q$. *Persamaan berlaku jika dan hanya jika G graf pohon*.

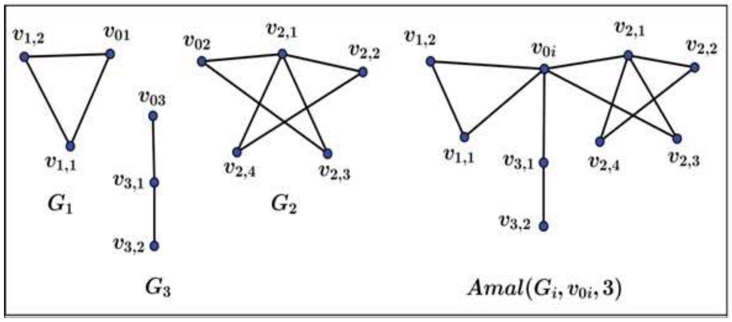
Liu dkk. (2014) [4], juga melakukan penyelidikan tentang bilangan terhubung-total pelangi untuk graf lingkaran Cn , graf roda Wn, dan graf bipartit lengkap $K_{m,n}$.

Dalam makalah ini dibahas berupa batas bawah dan batas atas bilangan terhubung-total pelangi untuk graf amalgamasi. Selanjutnya ditentukan bilangan terhubung-total pelangi untuk graf amalgamasi untuk kelas graf pohon dan graf lengkap. Pada bagian ini, didefinisikan $[a, b] = \{x \in Z | a \leq x \leq b\}$.

2. HASIL UTAMA

Misalkan $t \in \mathbb{N}$ dengan $t \geq 2$. Untuk $i \in [1, t]$, Misalkan G_i adalah graf terhubung tak trivial, $|V(Gi)| = n_i, n_i \in \mathbb{N}$ dengan $n_i \geq 2$. Misalkan $\{G_1, G_2, \ldots, G_t\}$ adalah koleksi berhingga graf terhubung tak trivial dan setiap Gi, mempunyai titik tetap v_{0i} . Graf Amalgamasi G_i dinotasikan dengan Amal (G_i, v_{0i}, t) adalah graf yang dibentuk dengan merekatkan semua graf G_i pada titik v_{0i} . Titik v_{0i} disebut sebagai titik terminal dalam Fitriani dan Salman (2016) .

Misalkan $G \cong Amal(G_i, v_{0i}, t)$, dengan $v_{0i} = v$. Definisikan $V(G) = \{v\} \cup \{v_i, j | i \in [1, t], j \in [1, k_i - 1]\}$. Sebagai contoh, lihat Gambar 1.



Gambar 1 Amalgamasi graf G_1, G_2, dan G_3

Berikut disajikan batas bawah dan batas atas bilangan terhubung-total pelangi untuk graf amalgamasi.

Teorema 2.1. *Misalkan* $t \in \mathbb{N},\ t \geq 2$. *Misalkan* $\{G_i \mid i \in [1,t]\}$ *adalah koleksi berhingga graf terhubung tak trivial dan setiap* G_i *mempunyai titik tetap* v_{0i}. *Jika* $G \cong Amal(G_i,\ v_{0i},\ t)$, *maka* $2diam(G) - 1 \leq trc(G) \leq 1 + \sum_{i=1}^{t} trc(G_i)$.

Bukti. Pertama, dibuktikan $trc(G) \geq 2diam(G) - 1$. Berdasarkan Lemma 1.1 yang disajikan pada Bab II, diperoleh $trc(G) \geq 2diam(G) - 1$.

Selanjutnya, ditunjukkan $trc(G) \leq 1 + \sum_{i=1}^{t} trc(G_i)$.

Misalkan f_i' suatu pewarnaan-$trc(G_i)$-total pelangi pada G_i. Definisikan pewarnaan $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow [1,\ 1 + \sum_{i=1}^{t} trc(G_i)]$ dengan aturan sebagai berikut.

- $$f(u) = \begin{cases} f_1'(u) & \text{jika } u \in V(G_i); \\ f_q'(u) + \sum_{p=1}^{q-1} trc(G_p) & \text{jika } u \in V(G_q) \text{ dan } q \in [2,t] \\ 1 + \sum_{p=1}^{t} trc(G_p) & \text{jika } u = v_{0i} = v \end{cases}$$

- $$f(e) = \begin{cases} f_1'(e) & \text{jika } e \in E(G_1); \\ f_q'(e) + \sum_{p=1}^{q-1} trc(G_p) & \text{jika } e \in E(G_q) \text{ dan } q \in [2,t] \end{cases}$$

Pandang sebarang dua titik berbeda $x, y \in V(G)$.

Kasus 1 $x, y \in V(G_i)$ untuk $i \in [1,t]$

Terdapat lintasan-total pelangi $x - y$ oleh pewarnaan f yang bersesuaian dengan f_i'.

Kasus 2 $x \in V(G_i)$ dan $y \in V(G_j)$.

Untuk $i \in [1,t]$ dan $j \in [1,t]$ dengan $i = j$.

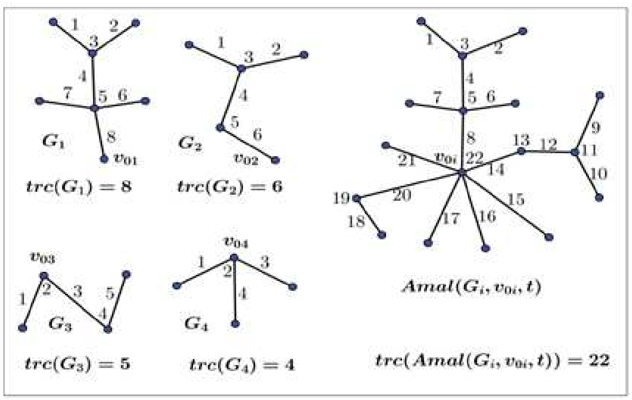
Terdapat lintasan-total pelangi $x - v$ dan $v - y$ oleh pewarnaan f yang bersesuaian secara berturut-turut dengan f_i' dan f_j', dengan v adalah titik di G yang bersesuaian dengan titik terminal v_{0i}. Misalkan $P_1 = x - v,\ P_2 = v - y$, dan $P_1 \cup P_2 = x - v,\ v - y$, yakni lintasan $x - y$ yang melalui titik v. Karena pewarnaan-total pelangi G_i berbeda untuk setiap $i \in [1,t]$, diperoleh $x - v,\ v - y$ adalah suatu lintasan-total pelangi $x - y$. Karena itu, f adalah pewarnaan-total pelangi pada G. Jadi, $trc(G) \leq 1 + \sum_{i=1}^{t} trc(G_i)$.

Teorema 2.2. *Misalkan* $t,\ p,$ *dan* q *adalah bilangan bulat dengan* $t \geq 2$ *serta* $p \in [0,t]$ *dan* $q \in [0,t]$ *sedemikian sehingga* $p + q = t$. *Misalkan* $G \cong Amal(Gi,\ v_{0i},\ t)$ *dengan* $G_i,\ i \in [1,\ t]$ *adalah sebarang graf pohon. Jika* G_i *yang mempunyai titik* *terminal berderajat satu ada sebanyak* p *dan* G_i *yang mempunyai titik terminal berderajat sedikitnya dua ada sebanyak* q, *maka bilangan terhubung-total pelangi graf* G *adalah*

$$\begin{aligned} trc(G) &= 1 + \sum_{i=1}^{t}(n_i - 1) - 1 + 1 - q + \sum_{i=1}^{t} r_i \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{t}(n_i - 1) - q + \sum_{i=1}^{t} r_i \\ &= 1 - q + \sum_{i=1}^{t} n_i - 1 + r_i \\ &= 1 - q + \sum_{i=1}^{t} trc(G) \end{aligned}$$

■

Sebagai ilustrasi, disajikan contoh pewarnaan $1 - q + \sum_{i=1}^{t} trc(G_i)$-total pelangi pada graf amalgamasi pohon $Amal(G_i,\ v_{0i},\ t)$ dengan $t = 4$ dan $q = 2$ pada Gambar 2.



Gambar 2: Pewarnaan-22-total pelangi pada $Amal(G_i,\ v_{0i},\ t)$

Teorema 2.3. *Misalkan* n *dan* t *adalah bilangan asli dengan* $n \geq 3$ *dan* $t \geq 2$. *Untuk* $i \in [1, t]$, *Misalkan* $G \cong Amal(K_n^i, v_{0i}, t)$, *dengan* K_i^n *adalah graf lengkap* K_n *berorde* n. *Bilangan terhubung-total pelangi graf* G *adalah*

$$trc(G) = \begin{cases} t + 1 & untuk\ t = 2, 3; \\ 5 & untuk\ t \geq 4 \end{cases}$$

Bukti. Didefinisikan himpunan titik dan himpunan sisi graf G sebagai berikut. $V(G) = \{v\} \cup \{v_{i,j} | i \in [1, t]$ dan $j \in [1, n]\}$ dan
$E(G) = \{vv_{i,j} | i \in [1, t]$ dan $j \in [1, n]\} \cup \{v_{i,k}v_{i,l} | i \in [1, t]$ dan $k, l \in [1, n], k \neq l\}$.
Mudah diperiksa bahwa diameter G adalah $diam(G) = 2$.
Pembuktian dibagi menjadi dua kasus sebagai berikut.
Kasus 1 $t = 2, 3$
Pertama, ditunjukkan $trc(G) \geq t + 1$.
Karena $diam(G) = 2$, diperoleh $trc(G) \geq t + 1 = 3$ untuk $t = 2$.
Andaikan $trc(G) \leq 3$ untuk $t = 3$, maka terdapat f suatu pewarnaan-3-total pelangi pada G. Pandang dua titik berbeda $v_{i,k}, v_{j,l} \in V(G)$ dengan $i, j \in [1, 3]$ dan $k, l \in [1, n]$. Lintasan $v_{i,k} - v_{j,k}$ dengan panjang tidak lebih dari diameter hanyalah $v_{i,k}vv_{j,l}$. Dari sini, jelas bahwa $f(v_{i,k}) \neq f(v)$ untuk setiap $i \in [1, 3]$ dan $k \in [1, n]$. Tetapkan suatu warna untuk titik v, sehingga tersisa 2 warna untuk mewarnai sisi $vv_{i,k}$, $i \in [1, 3]$, $k \in [1, n]$. Sebarang pewarnaan sisi-sisi $vv_{i,k}, i \in [1,3], k \in [1, n]$ menggunakan 2 warna,

terdapat $i,j \in [1,3]$ dan $k,l \in [1,n]$ sedemikian sehingga sisi $vv_{i,k}, vv_{j,l}$ memperoleh warna yang sama. Akibatnya tidak ada lintasan-total pelangi $v_{i,k} - v_{j,l}$. Hal ini bertentangan dengan pengandaian $trc(G) \leq 3$ untuk $t = 3$. Haruslah $trc(G) \geq t + 1 = 4$ untuk $t = 3$.

Selanjutnya, ditunjukkan $trc(G) \leq t + 1$. Misalkan $u \in V(G)$ dan $e \in E(G)$. Definisikan pewarnaan $c: V(G) \cup E(G) \to [1, t+1]$ dengan aturan sebagai berikut.

- $c(u) = \begin{cases} 1 & \text{jika } u = v_{i,k}, i \in [1,t], k \in [1,n] \\ t+1 & \text{jika } u = v \end{cases}$
- $c(e) = \begin{cases} 1 & \text{jika } e = v_{i,k}v_{i,l},\ i \in [1,t] \text{ dan } k,l \in [1,n]; \\ i & \text{jika } e = vv_{i,k},\ i \in [1,t] \text{ dan } k \in [1,n] \end{cases}$

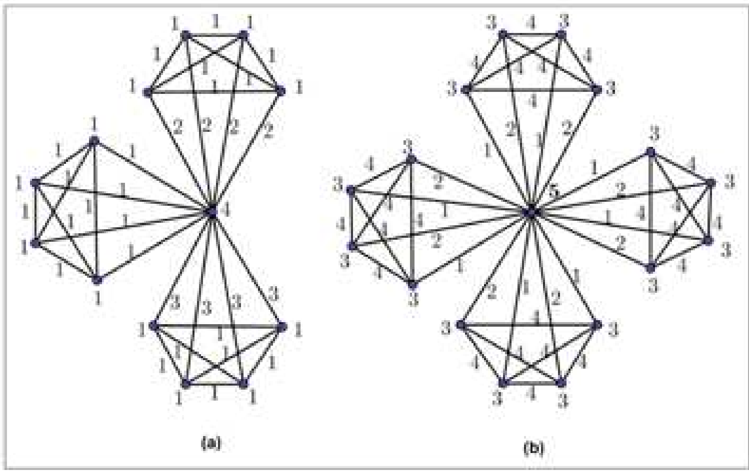
Jelas bahwa sebarang dua titik bertetangga $x, y \in V(G)$ terdapat lintasan-total pelangi $x - y$ yaitu xy. Untuk dua titik berbeda tidak bertetangga, yaitu $v_{i,k}, v_{j,l}$ dengan $i,j \in [1,t], i \neq j$ dan $k,l \in [1,n]$, lintasan-total pelangi $v_{i,k} - v_{j,l}$ adalah $v_{i,k}vv_{j,l}$. Karena itu, $trc(G) \leq t + 1$ untuk $t = 2, 3$.

Kasus 2 $t \geq 4$.
Pertama, ditunjukkan $trc(G) \geq 5$ untuk $t \geq 4$. Andaikan $trc(G) \leq 4$, maka terdapat f suatu pewarnaan-4-total pelangi pada G. Dengan cara yang serupa seperti pada kasus 1 untuk $t = 3$ diperoleh suatu kontradiksi. Jadi terbukti $trc(G) \geq 5$ untuk $t \geq 4$.
Selanjutnya, ditunjukkan $trc(G) \leq 5$. Misalkan $u \in V(G)$ dan $e \in E(G)$. Definisikan pewarnaan $c: V(G) \cup E(G) \to [1, 5]$ dengan aturan sebagai berikut.

- $c(u) = \begin{cases} 3 & \text{jika } u = v_{i,k}, i \in [1,t], k \in [1,n] \\ 5 & \text{jika } u = v \end{cases}$
- $c(e) = \begin{cases} 1 & \text{jika } e = vv_{i,k},\ i \in [1,t] \text{ dan } i \text{ ganjil; } k \in [1,n]; \\ 2 & \text{jika } e = vv_{i,k},\ i \in [1,t] \text{ dan } i \text{ genap; } k \in [1,n] \\ 4 & \text{jika } e = v_{i,k}v_{j,l},\ i,j \in [1,t] \text{ dan } k,l \in [1,n] \end{cases}$

Jelas bahwa sebarang dua titik bertetangga $x, y \in V(G)$ terdapat lintasan-total pelangi $x - y$, yaitu xy. Perhatikan dua titik berbeda $x, y \in V(G)$ yang tidak bertetangga.
(1) $x = v_{i,k}$ dan $y = v_{j,l}$.
Untuk $i \in [1,t]$, $j \in [1,t]$, $k \in [1,n]$, dan $l \in [1,n]$ dengan k dan l mempunyai varitas sama, terdapat lintasan-total pelangi $v_{i,k} - v_{j,l}$, yaitu
$v_{i,k}vv_{j,l-1}v_{j,l}$.
(2) $x = v_{i,k}$ dan $y = v_{j,l}$.
Untuk $i \in [1,t]$, $j \in [1,t]$, $k \in [1,n]$, dan $l \in [1,n]$ dengan k dan l berbeda varitas, terdapat lintasan-total pelangi $v_{i,k} - v_{j,l}$, yaitu
$v_{i,k}vv_{j,l}$.
Jadi terbukti $trc(G) \leq 5$ untuk $t \geq 4$. ■

Untuk ilustrasi, disajikan pewarnaan-4-total pelangi pada graf amalgamasi lengkap $Amal(K_n^i,\ v_{0i},\ t)$ dengan $n = 5$ dan $t\ =\ 3$ serta pewarnaan-5-total pelangi pada $Amal(K_n^i,\ v_{0i},\ t)$ dengan $n = 5$ dan $t = 4$ seperti pada Gambar 3.



Gambar 3 (a) Pewarnaan-4-total pelangi pada $Amal(K_5^i, v_{0i}, t)$
(b) Pewarnaan-5-total pelangi pada $Amal(K_n^i, v_{0i}, t)$

DAFTAR PUSTAKA

Chartrand, G., Johns, G.L., McKeon, K.A., dan Zhang, P. (2008): Rainbow connection in graphs, *Math Bohemica*, **133**, 85-98.

Fitriani, D. dan Salman, A.N.M. (2016): Rainbow connection number of amalgamation of some graphs, *AKCE International Journal Graphs and Combinatorics*, **13**, 90-99.

Krivelevich, M. dan Yuster, R. (2010): The rainbow connection of graph in (at most) reciprocal to its minimum degree, *J. Graph Theory*, **63**, 185- 191

Liu, H., Mestre, A., dan Sousa, T. (2014): Total rainbow k-connection in graphs, *Discrete Applied Mathematics*, **174**, 92-101.

Sun, Y. (2013): On two variants of rainbow connection, *WSEAS Transactions on Mathematics*, **12**, 266-272.

Uchizawa, K., Aoki, T., Suzuki, A., dan Zhou, X. (2011): On the rainbow connectivity of graph, *Complexit and FPT Algorithms*, **6842**, 86-97.