Karakterisasi Modul Dedekind yang Dibangun Secara Hingga Melalui Order Modul

La Ode Sirad
Universitas Sembilanbelas November Kolaka
email: laodesirad.usnkolaka@gmail.com

Abstrak

Misalkan R merupakan gelanggang komutatif dengan unsur satuan dan T merupakan himpunan multiplikatif dari semua unsur regular R. Gelanggang hasil bagi dari R, yaitu RT^{-1}, senantiasa dapat dikonstruksi sehingga dapat dilakukan penyisipan R ke dalam RT^{-1}. Salah satu kaitan antara gelanggang dan modul adalah melalui order modul $\theta(M)$. Order modul dapat dipandang sebagai gelanggang komutatif. Lebih jauh, order modul merupakan subgelanggang dari gelanggang hasil bagi. Gelanggang yang setiap ideal tak-nolnya dapat dibalik disebut gelanggang Dedekind. Konsep ideal yang dapat dibalik diperumum ke dalam teori modul. Pada teori modul, telah dikembangkan konsep submodul yang dapat dibalik. Dengan demikian pengertian modul Dedekind dapat dibangun. Pada pengkajian keterkaitan antara struktur dari M suatu modul-R dengan modul-$\theta(M)$, ditemukan bahwa sifat-sifat pada modul-R juga mempengaruhi sifat-sifat pada modul-$\theta(M)$. Modul-$\theta(M)$ merupakan modul Dedekind, order modul merupakan gelanggang Dedekind dan order modul adalah tertutup secara integral jika M merupakan modul-R Dedekind yang dibangun secara hingga. Hasil utama dalam penelitian ini membahas karakterisasi modul Dedekind yang dibangun secara hingga terkait dengan sifat order modul.

Kata kunci: *modul Dedekind, order modul, submodul yang dapat dibalik.*

1. PENDAHULUAN

Dalam bidang Aljabar, dikenal suatu sistem matematika yaitu modul. Modul yang bersifat Dedekind disebut modul Dedekind. Pembahasan mengenai modul tidak terlepas dari struktur grup dan gelanggang. Pembahasan konsep daerah Dedekind ke dalam area modul telah diperkenalkan oleh *Naoum dan Al-Alwan* dalam Garminia (2008). Konsep tersebut membuka jalan untuk penelaahan sifat-sifat yang berkaitan dengan modul Dedekind atas gelanggang komutatif.

Suatu R disebut gelanggang Dedekind jika R gelanggang dan setiap ideal tak-nol I dari R dapat dibalik. Konsep inilah yang menurut *Naoum dan Al-Alwan* yang diperumum menjadi submodul yang dapat dibalik. Suatu submodul tak-nol N dari M dapat dibalik jika $N'N = M$ dengan N' merupakan subhimpunan dari gelanggang hasil bagi RT'. Jika setiap submodul tak-nol N dapat dibalik dari M modul tak-nol maka dikatakan M modul Dedekind.

Salah satu kaitan antara modul Dedekind dengan gelanggang adalah melalui konsep order modul. Misalkan M modul-R, order dari M di gelanggang hasil bagi RT^{-1} didefinisikan dengan himpunan $\theta(M) = \{q \in RT^{-1} \mid qM \subseteq M\}$. Oleh karena itu peneliti tertarik mengkaji karakteristik modul Dedekind yang dibangun secara hingga melalui order modul.

Tujuan dari penelitian adalah menentukan hubungan antara modul Dedekind yang dibangun secara hingga dengan sifat-sifat yang terkait dengan order modul dan menentukan syarat perlu dan cukup dari modul Dedekind yang dibangun secara hingga melalui order modul.

2. ORDER MODUL DAN MODUL DEDEKIND

Berikut adalah definisi tentang order modul beserta akibatnya dan definisi modul Dedekind serta kaitannya dengan modul hasil bagi.

2.1 Order Modul

Secara sederhana, order modul adalah suatu gelanggang yang memenuhi kriteria tertentu. Untuk pendefinisian order modul diperlukan pengertian gelanggang hasil bagi. Misalkan R merupakan gelanggang komutatif, T merupakan himpunan bagian multiplikatif dari R. Telah diketahui bahwa R dapat disisipkan ke dalam gelanggang hasil bagi yaitu $RT^{-1} = \left\{\frac{r}{t} \mid r \in R,\ t \in T\}\right\}$.

Definisi 2.1.1

Misalkan M adalah modul-R, order dari M di RT^{-1} didefinisikan sebagai

$$\theta(M) = \{q \in RT^{-1} \mid qM \subseteq M\}.$$

Himpunan dari $\theta(M)$ merupakan ***Order Modul***.

Akibat dari pendefinisian diatas diperoleh sifat-sifat order modul sebagai berikut.

1. Order modul $\theta(M)$ merupakan suatu gelanggang bagian dari RT^{-1} dengan $R \subseteq \theta(M)$.
   Bukti :
   (a) $\theta(M) \neq \emptyset$
   (b) $\theta(M) \subseteq RT^{-1}$ berdasarkan definisi.
   (c) Ambil sebarang $p \in (x-y)M \subseteq M$, maka $p = (x-y)m, \exists m \in M$. Karena $xM \subseteq M, yM \subseteq M$, maka $p = (x-y)m = xm - ym \in M$. Sehingga $(-y)M \subseteq M$. Jadi $x - y \in \theta(M)$.
   (d) Ambil sebarang $q \in (xy)M \subseteq M$, maka $q = (xy)m, \exists\, m \in M$. Karena RT^{-1} tertutup terhadap operasi perkalian maka $xy \in RT^{-1}$. Maka $q = (xy)m \in M$, sehingga $(xy)M \subseteq M$. Sehingga $xy \in \theta(M)$.
   Jadi $\theta(M)$ merupakan suatu gelanggang. ■

2. Modul M merupakan modul-$\theta(M)$.
   Bukti :
   Definisikan :
   $$\theta(M) \times M \to M$$
   dengan $(\alpha, m) = \alpha m, \exists \alpha \in \theta(M)$ dan $m \in M$. Diketahui $(M, +)$ merupakan grup. Maka akan ditunjukkan sifat aksi skalar terhadap modul.
   (a) Ambil $\alpha \in \theta(M)$ dan $m, n \in M$. Akan ditunjukkan $(m+n)\alpha = m\alpha + n\alpha$.
   $(m+n)\alpha = (m+n)(rt^{-1}) = \big((m+n)r\big)t^{-1} = mrt^{-1} + nrt^{-1} = m\alpha + n\alpha$.
   (b) Ambil $\alpha, \beta \in \theta(M)$ dan $m \in M$. Akan ditunjukkan $m(\alpha + \beta) = m\alpha + m\beta$.

$$m(\alpha+\beta)=(m)(r_1t_1^{-1}+r_2t_2^{-1})=m(r_1t_2+r_2t_1)(t_1t_2)^{-1}=mr_1t_1+mr_2t_2$$
$$=m\alpha+m\beta$$

(c) Ambil $\alpha,\beta\in\theta(M)$ dan $m\in M$. Akan ditunjukkan $m(\alpha\beta)=(m\alpha)\beta$.
$$m(\alpha\beta)=(m)(\left((r_1t_1^{-1})(r_2t_2^{-1})\right)=(m(r_1r_2)(t_2t_1)^{-1}=(mr_1t_1^{-1})(r_2t_2^{-1})$$
$$=(m\alpha)\beta$$

(d) Ambil $m\in M$. Akan ditunjukkan $m\cdot 1_{\theta(M)}=m$.
$$m\cdot 1_{\theta(M)}=m(1.1^{-1})=(m\cdot 1)1^{-1}=m\cdot 1^{-1}=m.$$

Jadi M merupakan modul-$\theta(M)$ ■

2.2. Modul Hasil Bagi dan Modul Dedekind

Misalkan $f(x)$ suatu polinom dan $R[x]$ merupakan gelanggang polinom, unsur $f(x)\in R[x]$ dikatakan polinom monik bila koefisien x dengan pangkat tertingginya adalah 1. Misalkan R dan S gelanggang dengan R subgelanggang dari S. Unsur $s\in S$ dikatakan integral atas R jika terdapat polinom monik $f(x)\in R[x]$ sehingga $f(s)=0$. Gelanggang R dikatakan tertutup secara integral di S jika untuk setiap unsur $s\in S$ yang integral atas R berlaku $s\in R$.

Contoh : Gelanggang bilangan bulat Z tertutup secara integral pada gelanggang bilangan rasional Q. Misalkan $\frac{s}{t}\in Q$ yang integral atas Z dengan $(s,t)=1$, ada $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_Ix^i\in Z[x]\ni f\left(\frac{s}{t}\right)=0$. Dari sini diperoleh $0=f\left(\frac{s}{t}\right)=\sum_{i=0}^{n}a_i\left(\frac{s}{t}\right)^i$, akibatnya $\left(\frac{s}{t}\right)^n=-(\sum_{i=0}^{n-1}a_i\left(\frac{s}{t}\right)^i$ atau

$s^n=-(\sum_{i=0}^{n-1}a_i\left(\frac{s}{t}\right)^i t^n$ atau $s^n=-\sum_{i=0}^{n-1}a_is^it^{n-1-i})t$. Sehingga $t\mid s^n$ akibatnya $t\mid s$. Karena $(s,t)=1$. Jadi t adalah unit. Akibatnya $\frac{s}{t}\in Z$. Jadi Z tertutup secara integral di Q. ■

Misalkan R suatu daerah integral dengan gelanggang hasil bagi RT^{-1} dan I ideal dari R. Definisikan himpunan $I^{-1}=\{x\in RT^{-1}\mid xI\subseteq R\}$, dengan himpunan I^{-1} merupakan submodul-R dari RT^{-1} dengn $R\subseteq I^{-1}$ dan $I^{-1}I=\{\sum_{i=1}^{n}q_ia_i\in R: q_i\in I^{-1},a_i\in I\}$ ideal dari R dengan $I\subseteq I^{-1}I$.

Suatu R daerah integarl dengan setiap ideal tak-nol dari R mempunyai balikan disebut ***daerah Dedekind***. Sebagai contoh, daerah integral Z dengan lapangan hasil bagi Q adalah daerah Dedekind. Contoh lain daerah Dedekind adalah daerah ideal utama tak-nol Ra adalah ideal yang dapat dibalik. Konsep ideal yang dapat dibalik kemudian diperumum menjadi submodul yang dapat dibalik. Sebelum diuraikan definisi submodul yang dapat dibalik, terlebih dahulu diberikan suatu teorema berkaitan dengan gelanggang hasil bagi.

Teorema 2.2.1

Misalkan M adalah suatu modul-R dan N adalah suatu submodul-R tak-nol dari M. Himpunan $N':=\{x\in RT^{-1}\mid xN\subseteq M\}$ adalah suatu modul-R dengan $R\subseteq N'$ dan $N'N\subseteq M$.

Bukti:

1. Jelas $N'\neq\emptyset$
2. Berdasarkan definisi $N'\subseteq RT^{-1}$
3. Tertutup terhadap operasi penjumlahan yaitu $x-y\in N'$

Ambil sebarang $x, y \in N'$.
$x \in N'$ yaitu $x = r_1 t_1' \in RT^{-1}, \exists r_1 \in R, t_1 \in T$, dengan $xN \subseteq M$. $y \in N'$ maka $y = r_2 t_2' \in RT^{-1}, \exists r_2 \in R, t_2 \in T$, dengan $xN \subseteq M$. Perhatikan bahwa $(r_1 t_2 - r2t1 \in R,\ t1t2 \in T$. Sehingga $x-y=r1t1-1-r2t2-1=r1t2-r2t1t1t2 \in RT-1.$
Akan ditunjukkan $(x - y)N \subseteq M$, maka $p = (x - y)n, \exists\, n \in N$. Karena $xN \subseteq M, yN \subseteq M$, maka $p = (x - y)n = xn - yn \in M$.
Sehingga $(x - y)N \subseteq M$. Jadi $x - y \in N'$.

4. Untuk setiap $x \in N'$ dan $a \in R$. Akan ditunjukkan $ax \in N'$.
$x \in N'$ yaitu $x = r_1 t_1' \in RT^{-1}, \exists r_1 \in R, t_1 \in T$, dengan $xN \subseteq M$.
Maka $ax = a(rt^{-1}) = (ar)t^{-1} \in RT^{-1}$. Akan ditunjukkan $(ax)N \subseteq M$. Ambil sebarang $q \in (ax)N$ maka $q = (ax)n, \exists n \in N$. Karena $aN \subseteq M$ dan N modul bagian dari M, maka $q = (ax)n = a(xn) \in M$ sehingga $(ax)N \subseteq M$. Jadi $ax \in N'$.

Jadi N' adalah modul atas RT^{-1}, dengan $R \subseteq N'$ dan $N'N \subseteq M$ jelas berdasarkan definisi dari N'. ■

Hal ini memotivasi untuk mendefinisikan submodul yang dapat dibalik sebagai berikut.

Definisi 2.2

Misalkan M adalah suatu modul-R dan N adalah submodul-R taknol dari M. Himpunan $N' \coloneqq \{x \in RT^{-1} \mid xN \subseteq M\}$ dikatakan *submodul yang mempunyai balikan* di M jika $N'N = M$.

Dari teorema 2.2.1 dan definisi 2.2 maka dapat didefinisikan suatu modul yang menjadi kajian utama dalam penelitian ini yaitu modul Dedekind.

Definisi 2.3

Suatu M modul-R tak-nol adalah dikatakan ***modul Dedekind*** jika setiap submodul tak-nol dari M adalah mempunyai balikan.

Contoh : Bilangan rasional Q merupakan suatu modul-Z Dedekind.

Misalkan Z merupakan gelanggang bilangan bulat dan misalkan $0 \neq n \in Z$. Tetapkan $I = nZ$. Karena himpunan S pembagi tanpa-nol dari Z adalah $Z - \{0\}$'

$$T = TI^{-1} = \{s \in Z - \{0\} | sn = 0, \Rightarrow n = 0\}$$

Sehingga $(nZ)' = I' = \{x \in Q \mid x(nQ) \subseteq Z\}$, dengan Q adalah lapangan dari bilangan rasional. Jelas bahwa $I' = I^{-1}$. Perhatikan bahwa I adalah suatu ideal yang dapat dibalik di Z, oleh karena itu $I^{-1} = I'I = Z$, yaitu, ideal I adalah juga dapat dibalik sebagai submodul-Z. Ambil $J = 4Z$ sebagai suatu submodul-Z dari $2Z$ modul-Z. Sehingga $J' = \{x \in Q \mid x(4Z) \subseteq 2Z\}$. Misalkan $J' = 1/2Z$, maka $J'J = (1/2Z)(4Z) = 2Z$, yaitu, $4Z$ adalah suatu submodul yang dapat dibalik di $2Z$. ■

Gelanggang hasil bagi dapat diperumum menjadi modul hasil bagi. Jika M merupakan modul-R Dedekind, maka $MT^{-1} = \{[m, s] \mid m \in M, s \in T\}$ merupakan suatu modul-RT^{-1} Dedekind, dan MT^{-1} merupakan modul sederhana atas gelanggang hasil bagi RT^{-1}.

Proposisi 2.2.1

Misalkan M modul-R Dedekind dan $T = \{t \in S \,|tm = 0, \Rightarrow m = 0\}$ adalah himpunan bagian multiplikatif. Modul hasil bagi MT^{-1} merupakan modul-RT^{-1} sederhana.

Bukti :
Misalkan $0 \neq K$ merupakan modul bagian dari MT^{-1}. Sehingga $K = NT^{-1}$ untuk suatu N submodul dari M. Misalkan $m/s \in MT^{-1}$ untuk suatu $m \in M, s \in T$. Karena untuk setiap $n \in N$, submodul Rn adalah submodul yang dapat dibalik maka terdapat $t \in T$ dan $r \in R \ni tm = rn$. Akibatnya $m/s \in NT^{-1}$. Maka $K = NT^{-1} = MT^{-1}$. Jadi MT^{-1} adalah modul-RT^{-1} sederhana. ■

Karena MT^{-1} adalah modul-RT^{-1} sederhana, akibatnya M merupakan modul-R sederhana sehingga M memiliki rank$(M) = 1$.

3. Struktur Modul Dedekind atas Order Modul

Beberapa jenis modul yang terkait dengan pembahasan modul pada penelitian ini akan disajikan pada bagian ini. Jenis modul yang dimaksud adalah jenis modul yang dibangun secara hingga dan modul bebas-torsi.

Misalkan R merupakan gelanggang dan M suatu modul-R. Suatu himpunan $S = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ dikatakan membangun M, jika $\forall m \in M$, maka dapat ditulis dalam bentuk $m = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i = r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n$ dengan $r_1, r_2, \cdots, r_n \in R$. Modul M dikatakan *dibangun secara hingga* jika terdapat $\{m_i \in M \,|\, 1 \leq i \leq n\}$ dan $\forall m \in M \ni m = \sum_{i=n}^{n} m_i r_i$ dengan $r_i \in R$.

Sesuai definisi modul, suatu gelanggang dengan unsur satuan dapat dipandang sebagai modul atas dirinya sendiri. Diperhatikan pada kasus ketika gelanggang tersebut memuat unsur pembagi nol. Ingat kembali bahwa unsur pembagi nol pada suatu gelanggang adalah jika untuk setiap $0 \neq a \in R$ terapat $b \in R \ni ab = 0$. Hal ini yang mendasari sehingga didefinisikan modul bebas torsi.

Misalkan M merupakan modul-R, dikatakan $m \in M$ unsur torsi jika terdapat $r \in R\backslash\{0_R\}$ sehingga $rm = 0_M$. Misalkan M modul-R, modul M dikatakan *bebas torsi* jika $\forall\ 0 \neq m \in M$ dan $0 \neq r \in R\ \ni rm \neq 0$. Dengan kata lain, suatu modul yang tidak memiliki unsur torsi tak-nol adalah dikatakan *modul bebas torsi*.

3.1 Keterkaitan Struktur Modul-R dengan Modul-$\theta(M)$

Misalkan R gelanggang komutatif dengan unsur satuan dan M modul-R yang dibangun secara hingga. Perhatikan bahwa $\theta(M)$ merupakan gelanggang komutatif dan tidak memuat pembagi nol. Kaitan antara M modul-R Dedekind yang dibangun secara hingga dengan M modul-$\theta(M)$ disajikan dalam lemma berikut.

Lemma 3.1.1

Misalkan M adalah modul-R yang dibangun secara hingga dan M merupakan modul-R Dedekind maka M adalah suatu modul-$\theta(M)$ bebas torsi yang dibangun secara hingga.

Bukti:

Misalkan pembangun dari M modul-R, himpunan $\{m_1, m_2, \cdots, m_k\}$ dengan $k \in Z$. Untuk setiap $m \in M$ dapat dituliskan sebagai

$$m = \sum_{i=1}^{k} s_i m_i$$

dengan $s_i \in R \subset \theta(M)$.

Jadi M merupakan modul-$\theta(M)$ yang dibangun secara hingga.
Karena $\theta(M)$ merupakan gelanggang yang tidak memuat pembagi nol, maka $\forall s_i \in \theta(M)$ dan $m_i \in M$, yaitu $s_i m_i \neq 0$, dengan $s_i \neq 0$ dan $m_i \neq 0$. Jadi M merupakan modul-$\theta(M)$ bebas-torsi yang dibangun secara hingga. ■

Jika diberikan R adalah gelanggang komutatif dengan unsur satuan dan M modul-R Dedekind yang dibangun secara hingga. Sifat berikut ini akan menjelaskan bagaimana sifat-sifat dari $\theta(M)$ order modul.

Lemma 3.1.2

Misalkan M dibangun secara hingga dan M modul-R Dedekind. Modul M merupakan modul-$\theta(M)$ Dedekind dan gelanggang $\theta(M)$ merupakan daerah Dedekind. Lebih lanjut $\theta(M)$ adalah tertutup secara integral di RT^{-1}.

Bukti:

Misalkan $N \neq 0$ submodul dari M modul-$\theta(M)$. Karena $R \subseteq \theta(M)$ sehingga $N \neq 0$ submodul dari M modul-M sehingga $N'N = M$. Sehingga modul M adalah suatu modul-$\theta(M)$ Dedekind.

Misalkan A sebarang idel tak-nol dari $\theta(M)$. $(AM)' = \{q \in K \mid qA \subseteq \theta(M)\}$, merupakan invers dari A pada $\theta(M)$. Oleh karena itu, $A^{-1}AM = M$ sebagai modul-$\theta(M)$. Karena M modul-$\theta(M)$ adalah dibangun secara hingga, maka $A^{-1}A = \theta(M)$. Jadi setiap ideal tak-nol dari $\theta(M)$ adalah dapat dibalik. Akibtanya $\theta(M)$ adalah suatu daerah Dedekind. Misalkan M merupakan modul-R yang dibangun secara hingga, berdasarkan Lema 3.1.1, modul M merupakan modul-$\theta(M)$ yang dibangun secara hingga. Jika M adalah modul-R Dedekind, maka $\theta(M)$ adalah daerah Dedekind dan akibatnya $\theta(M)$ adalah tertutup secara integral. ■

3.2 Submodul Prima dan Submodul Maksimal.

Definisi 3.2.1

Jika M merupakan modul-R dan N submodul dari M. Submodul N dikatakan *submodul-R prima* dari M, jika $rm \in N$ dan $\forall r \in R, m \in M$ maka $m \in N$ atau $r \in (N : M)$ dengan $(N : M) = \{r \in R \mid rM \subseteq N\}$.

Jika N merupakan submodul prima, maka $(N : M)$ merupakan ideal prima dari R. Misalkan M merupakan modul-R, suatu annihilator dari modul yang didefinisikan dengan $ann_R(M) = \{r \in R \mid rm = 0_M,\ \forall m \in M\}$. Berdasarkan definisi diatas, khususnya jika $(0 : M)$ maka dikatakan annihilator dari M dan dinotasikan dengan $ann(M)$. Jika N adalah submodul prima dari M maka annihilator $(N : M)$ dari modul M/N adalah ideal prima dari R. Contoh, submodul pZ di modul-Z dengan p merupakan bilangan prima tertentu merupakan submodul prima.

Karakterisasi dari submodul prima dari M modul Dedekind dinyatakan dalama Lemma berikut ini, khususnya jika submodul dari M merupakan submodul nol.

Lemma 3.2.1

Misalkan N merupakan submodul dari M modul Dedekind. Maka $N = 0$ jika dan hanya jika $(N : M) = 0$.

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Jika $N = 0$, maka berdasarkan definisi $rM \subseteq N = 0$ yaitu $rM \subseteq 0$. Karena N submodul dari M, maka $0 = r0 \in rM$, sehingga $0 \subseteq rM$. Jadi $(N : M) = 0$.

$(\Leftarrow)$ Jika $(N : M) = 0$ yaitu $(N : M) = \{r \in R \mid rM \subseteq N\} = 0$. Misalkan $N \neq 0$ submodul dari M. Pilih $0 \neq n \in N$. Misalkan $M = Rm_i$, untuk suatu $m_i \in M$ dan untuk setiap $i = 1, \cdots, k$. Akan ditunjukkan $r_i m_i \in N$. Dari Proposisi 2.2.1 diperoleh $\text{rank}(M) = 1$, sehingga untuk setiap $i = 1, \cdots, k$ terdapat $t_i \in T \subseteq R, r_i \in R \ni t_i n_i = r_i m_i \in N$. Berdasarkan definisi diperoleh $0 \neq r_1 \cdots r_k \in (N : M)$ yaitu suatu kontradiksi. Jadi jika $N = 0$, maka $0 \in (N : M)$. ■

Definisi 3.2

Suatu M modul-R, submodul N dikatakan *submodul maksimal* dari M jika $N \neq M$ dan untuk setiap submodul P, jika $N \subseteq P \subseteq M$ maka $P = N$ atau $P = M$.

Dari dua definisi diatas, maka setiap submodul maksimal merupakan submodul prima seperti yang dinyatakan dalam proposisi berikut ini.

Proposisi 3.2.1

Misalkan R merupakan gelanggang dan M adalah modul-R. Untuk setiap submodul maksimal dari M adalah submodul prima.

Bukti :

Misalkan N merupakan submodul maksimal. Asumsi bahwa $a \in R$ dan $x \in M \ni aR.x \subseteq N$. Misalkan bahwa $x \notin N$, maka $0 \neq x + N \in M/N$, yang berarti $x + N$ adalah siklik untuk modul ini. Akibatnya, untuk setiap $y \in M$ terdapat $b \in R \ni y + N = b.(x + N)$. Sehingga diperoleh $y - b.x \in N$ dan oleh karena itu $a.y - ab.x \in N$. Berdasarkan asumsi bahw N adalah submodul maksimal, maka $ab.x \in N$ sehingga $a.y \in N$. akibatnya $a \in (N : M)$. Jadi N merupakan submdul prima. ■

Lemma 3.2.2

Misalkan M dibangun secara hingga dan M modul Dedekind sebagai suatu modul-R dan misalkan N suatu submodul-R dari M sedemikian hingga M/N adalah modul-R bebas torsi. Sehingga $N = 0$ atau $N = M$.

Bukti :

Berdasarkan Lemma 3.2.1, jika $N \neq 0$ submodul dari M maka $0 \neq r_1 \cdots r_k \in (N : M)$. Akan ditunjukkan bahwa $0 \neq r \in Ann(M/N)$. Misalkan $r \in (N : M)$, yang berarti $rM \subseteq N$. Misalkan $m + N \in M/N$ sebarang, untuk suatu $m \in N$. Karena M/N bebas torsi, sehingga terdapat $0 \neq r \in R \ni r(M + N) = rm + N$. Karena $rm \in N$ maka $r(m + N) = rm + N = 0 + N$. Jadi $r \in Ann(M/N)$. Dengan demikian $0 \in M/N$ yang berarti $M = N$. ■

Misalkan M merupakan modul-R dan N submodul prima dari M modul-R, maka submodul N merupakan submodul maksimal dari M. Ini akan diperumum jika M merupakan modul-R Dedekind yang dibangun secara hingga, sehingga diperoleh M merupakan modul-$\theta(M)$ yang dibangun secara hingga.

Lemma 3.2.3

Misalkan M dibangun secara hingga dan Dedekind sebagai suatu modul-R. Untuk setiap submodul prima tak-nol dari M modul-$\theta(M)$ merupakan submodul maksimal.

Bukti :

Misalkan N merupakan submodul prima tak-nol dari M modul-$\theta(M)$. Misalkan $P = (N :_{\theta(M)} M)$. Ideal P adalah ideal maksimal dari $\theta(M)$. Jika $P = 0$, maka M/N adalah modul-$\theta(M)$ bebas torsi sehingga M/N juga modul-R bebas torsi dan $N = 0$ berdasarkan Lemma 3.2.2, yaitu suatu kontradiksi. Jadi $P \neq 0$. Berdasarkan Lemma 3.1.2, P adalah ideal maksimal. Sehingga

$$PM \subseteq N$$
$$N'(PM) \subseteq N'N = M$$
$$N'(PM) \subseteq M$$
$$P \subseteq N'P \subseteq \theta(M)$$

Andaikan $N'P = P$. Berdasarkan Lemma 3.2.2, ideal P merupakan modul-$\theta(M)$ yang dibangun secara hingga. Karena $\theta(M)$ adalah tertutup secara integral, maka $N' = \theta(M)$ sehingga $M = N'N = \theta(M)N = N$. Jadi, $M = N$, yaitu kontradiksi. Akibatnya $N'P = \theta(M)$. Maka $N = \theta(M)N = P(N'N) = PM$. Jadi N adalah submodul maksimal dari M modul-$\theta(M)$. ■

3.3 Keterkaitan Order Modul dan Modul Dedekind

Sifat suatu modul dapat dikaitkan dengan dengan gelanggang tumpuannya, sebaliknya gelanggang tumpuannya dapat dikaitkan dengan suatu modul. Hal ini pulalah yang dilakukan dalam penelitian ini yaitu mengkarakterisasi modul Dedekind yang dibangun secara hingga melalui order modul. Teorema berikut memberikan karakterisasi penting modul Dedekind dan juga akan dibutuhkan dalam membuktikan teorema utama dalam penelitian ini.

Teorema 3.3.1

Misalkan setiap submodul prima tak-nol dari M modul adalah mempunyai balikan, maka M modul merupakan modul Dedekind.

Bukti:
Andaikan bahwa M bukan modul Dedekind. Definisikan

$$\psi = \{N \leq M \mid N \neq 0 \ \ dan\ tidak\ mempunyai\ balikan\}$$

Asumsikan $\psi \neq \emptyset$. Misalkan $N_\lambda(\lambda \in Y)$ merupakan rantai dari unsur-unsur ψ. Misalkan $N = \bigcup_{\lambda \in Y} N_\lambda$ adalah submodul tak-nol dari M. Submodul $N \in \psi$ dan berdasarkan lema Zorn's memiliki suatu unsur maksimal. Misalkan P merupakan unsur maksimal untuk M yang dibangun secara hingga. Akan ditunjukkan bahwa P adalah submodul prima dari M. Jika tidak, maka terdapat $r \in R, m \in M$ dengan $rm \in P$ dan $m \notin P$. Definisikan $K = P + Rm$. Karena $m \notin P$ maka $K \notin \psi$. Sehingga K adalah submodul yang dapat dibalik dari M. Karena $K = P + Rm$ submodul yang dapat dibalik di M maka terdapat A submodul dari M sedemikian hingga $A(P + Rm) = M$. Lebih lanjut, $P \subseteq AP \subseteq M$ sehingga $AP = P$ atau AP adalah submodul yang dapat dibalik dari M. Jika AP adalah submodul yang dapat dibalik dan A submodul dari RT^{-1}, maka P adalah dapat dibalik, yaitu suatu kontradiksi bahwa $P \in \psi$. Maka haruslah $AP = P$.

$$AP + Am = P + Am$$
$$AP + ARm = AP + Am = P + Am$$
$$A(P + Rm) = AP + ARm = AP + Am = P + Am$$
$$M = A(P + Rm) = AP + ARm = AP + Am = P + Am$$

Jadi, $M = P + Am$ sehingga

$$rM = r(P + Am) = Pr + ARm \subseteq Pr + AP = Pr + P = P$$

Jadi, $rM \subseteq P$. Akibatnya P submodul prima dari M, yang kontradiksi.
Jadi, haruslah M modul Dedekind. ■

Pada konsep order modul, struktur order modul dilakukan melalui modul yang dibangun secara hingga. Sejalan dengan hal tersebut, sifat submodul prima yang mempunyai balikan dari suatu modul akan dikembangkan untuk sebarang submodul-submodul dari modul atas order modul sehingga diperoleh teorema berikut ini.

Teorema 3.3.2

Jika M adalah dibangun secara hingga sebagai modul-R. Modul M adalah modul-R Dedekind jika dan hanya jika:

1. Submodul-submodul prima dari M modul-$\theta(M)$ adalah maksimal.
2. $\theta(M)$ adalah Daerah Dedekind.

Bukti:
(⇒)
Berdasarkan Lema 3.1.2 maka diperoleh (2).
Berdasarkan Lema 3.2.3, maka diperoleh (1).
(⇐)

Misalkan $N \neq 0$ submodul prima dari M modul-$\theta(M)$. Berdasarkan 1, N adalah submodul maksimal dari M. Sehingga terdapat ideal maksimal P dari $\theta(M)$ sedemikian sehingga $PM \subseteq N$. Karena PM adalah submodul prima dari M modul-$\theta(M)$, sehingga berdasarkan 1, submodul PM merupakan submodul maksimal. Jadi $N = PM$.
Karena $P' = \{q \in RT^{-1} \mid qP \subseteq \theta(M)\}$ dengan $P' \subseteq N'$. Akibatnya, berdasarkan 2,

$$P'P = \theta(M)$$
$$\theta(M)M = (P'P)M$$
$$M = \theta(M)M = P'(PM) \subseteq N'N \subseteq M$$

Jadi, $N'N = M$.
Jadi N adalah mempunyai balikan dari M.
Berdasarkan teorema 3.3.1, maka M modul-$\theta(M)$ adalah modul Dedekind.
Misalkan L sebarang submodul dari M modul-R. Maka

$$L' = \{q \in RT^{-1} \mid qL \subseteq M\} = \{q \in RT^{-1} \mid q(\theta(M))L \subseteq M\}$$

Sehingga $\theta(M)L' \subseteq L'$ dan $(\theta(M)L')L \subseteq L'L$

$$L'(\theta(M)L) = (\theta(M)L')L \subseteq L'L$$
$$M = L'(\theta(M)L) = (\theta(M)L')L \subseteq L'L$$

Jadi L mempunyai balikan di M.
Jadi M adalah modul-R Dedekind.

■

4. KESIMPULAN

Dalam penelitian ini membahas sifat-sifat modul Dedekind yang dibangun secara hingga atas order modul. Misalkan M adalah modul-R Dedekind yang dibangun secara hingga maka M adalah suatu modul-$\theta(M)$ bebas torsi yang dibangun secara hingga. Lebih lanjut, M merupakan modul-$\theta(M)$ Dedekind, gelanggang $\theta(M)$ merupakan daerah atau gelanggang Dedekind dan gelanggang $\theta(M)$ adalah tertutup secara integral. Pengkajian yang telah dilakukan menunjukkan bahwa suatu modul Dedekind yang dibangun secara hingga atas order modul merupakan modul Dedekind atas gelanggang R jika dan hanya jika submodul-submodul prima dari M modul-$\theta(M)$ adalah maksimal dan $\theta(M)$ adalah gelanggang Dedekind.

DAFTAR PUSTAKA

Anderson, F. W., Fuller, K. R. (1974): Rings and Categories of Modules, *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 13, Springer-Verlag, New York.

Garminia, H.(1998): Gelanggang Hasil Bagi. *Tugas Akhir*, ITB.

Garminia, H., Astuti, P., Irawati. (2008): Modul Hasil Bagi dan Modul Dedekind, *Jurnal Matematika Sains*, 13(4), 114-117.

Kaplansky, I. (1970): Commutative Rings, *Boston*: Allyn and Bacon.

Khoramdel, M., Hesari, S. D. P. (2011): Some Notes On Dedekind Modules, *Hacetepe Journal of Mathematics and Statistics*, 40(5), 627 - 634.

Naoum, A.G., Al-Alwan, F. H. (2007): Dedekind Modules, *Communications in Algebra*, 24, 397-412.

Passman, D. S. (1991): A Course in Ring Theory, *Wadsworth and Brooks/ Cole Advanced Books and Software, Pacific Grove*, CA.

Roman, S (2008): Advanced Linier Algebra, *Third Edition, Springer Science +Business Media*.

Sarac, B., Smith, P. F., Tiras, Y. (2007): On Dedekind Modules. *Communi-cations in Algebra*, 35, 1533 - 1538.

Tiras, Y., Sarac, B. (2005): Dedekind Modules. *Communications in Algebra*, 33, 1617- 1626.