SAINTIFIK:
Jurnal Matematika, Sains, dan Pembelajarannya **Vol.9, No.2, Juli 2023, pp. 180~188**
ISSN 2407-4098 (print) DOI:10.31605/saintifik.v9i2.439
ISSN 2622-8904 (online)

Penerapan Sistem Persamaan Linear Aljabar Max Plus Pada Masalah Ground Handling di Terminal 1 Bandara Internasional Juanda

Eka Susilowati
Universitas Nahdatul Ulama Al Gazali Cilacap
Email: eka250@gmail.com

Abstrak

Delay sebuah pesawat dapat dikarenakan berbagai masalah, Salah satu penyebab adanya penundaan jadwal penerbangan adalah karena adanya pelayanan yang terjadi ground handling. Pada penelitian ini, kegiatan ground handling yang dilakukan adalah menggosongkan area, melepas garbarata/tangga, menyalakan mesin, penumpang naik, pengecekan log book, mengangkut muatan, pemeriksaan keliling, pengisian bahan bakar, pelayanan kabin, pelayanan kamar kecil, pelayanan dapur, membongkar muatan, mengecek log book,penumpang turun, mengatur posisi garbarata, mematikan mesin. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan penyelesaian system $A \otimes x = b$ *atas aljabar max plus dengan* $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}, x \in \mathbb{R}_{\max}^{m}, m, n \in \mathbb{N}$ *serta penerapan dalam masalah ground handling pesawat. Penelitian ini diawali dengan mengkaji sub penyelesaian terbesar dari system persamaan* $A \otimes x = b$. *Selanjutnya, akan membahas aplikasi system* $A \otimes x = b$ *atas aljabar max plus dalam masalah ground handling pesawat di terminal I Bandara Juanda. Hasil penelitian adalah vektor* $t^* = [34 \ \ 34 \ \ 25 \ \ 30.7 \ \ 20 \ \ 19 \ \ 21 \ \ 15.5 \ \ 22.7 \ \ 21 \ \ 17 \ \ 33.5 \ \ 20 \ \ 32 \ \ 34 \ \ 38.5]$ *bukan merupakan penyelesaian. Meskipun* t^* *bukan merupakan penyelesaian yang tepat untuk system persamaan di atas, bukan berarti pesawat akan mengalami penundaan jadwal keberangkatan. Akan tetapi, tidak terpenuhinya persamaan ketiga disebabkan karena penanganan pesawat di gate 3 selesai lebih awal.*

Kata kunci—*Pesawat, Ground Handling, Aljabar Max Plux, Penjadwalan*

1. PENDAHULUAN

Adanya peningkatan laju perekonomian di Indonesia, mengakibatkan permintaan jasa akan transportasi yang enak dan aman semakin melonjak naik. Mobilitas masyarakat yang semakin tinggi dari satu tempat ke tempat yang lain dengan kebutuhan waktu yang terbatas maka dibutuhkan transportasi yang mengefisienkan waktu. Salah satu pilihan transportasinya adalah pesawat terbang. Transportasi udara sekarang ini memiliki peran penting yang dapat menolong kita di setiap perubahan setiap negara yang berada dunia, termasuk juga negara Indonesia (Juniarti *et al.*, 2020). Transportasi udara, berperan sebagai moda transportasi yang meluas dipergunakan masyarakat disebabkan dapat menempuh jarak yang jauh namun efisien waktu dan dalam perkembangannya, dari segi keamanan maupun kenyamanan terjamin (Hestuningrum & Ahyudanari, 2019). Sarana penunjang yang juga berkaitan dengan adanya pesawat ini adalah dengan keberadaan bandara sebagai penunjang utama moda transportasi udara.

Contoh bandara besar yang ada di Indonesia adalah Bandara Internasional Juanda yang terletak di Jawa Timur. Bandara Juanda adalah bandara internasional yang peranannya penting dalam perkembangan ekonomi selain itu merupakan salah satu diantara pintu masuk Provinsi Jawa Timur.dari luar (Fendiyanto, 2019). Bandara Internasional Juanda melayani penerbangan domestic dan internasional. Demi membatasi kepadatan di terminal I, Bandara Internasional Juanda ini dibagi menjadi 2 terminal. Terminal 1 dipergunakan untuk penumpang yang akan melaksanakan keberangkatan penerbangan domestik dimana pelayanannya dilakukan oleh maskapai Citilink, Sriwijaya Air, Batik Air dan Lion Air, serta terminal 2 dimanfaatkan untuk penumpang yang akan melaksanakan keberangkatan penerbangan internasional dan beberapa penerbangan domestik dengan pelayanannya dilakukan oleh maskapai Garuda Indonesia, Air Asia, Mandala Tiger Airways, Lion Air, China Airlines, Singapore Airlines, Eva Air, Cathay Pacific, dan Jetstar/Value Air. Bandara Internasional Juanda mempunyai panjang landasan 3000 m (Hestuningrum & Ahyudanari, 2019)

Ground handling merupakan kegiatan menangani pesawat pada saat ada di darat atau apron bandara, dari kegiatan pesawat mendarat hingga selanjutnya melakukan penerbangan kembali. Ada beberapa jenis kegiatan pelayanan pada pesawat terbang berada di apron. Jenis- jenis kegiatan pesawat terbang pada umumnya yaitu melakukan persiapan tangga, penurunan penumpang dari pesawat terbang, mengisi bahan bakar pesawat terbang, penurunan bagasi, penurunan kargo, pembersihan kabin, persiapan makanan, pemuatan kargo, pemuatan bagasi, proses naik penumpang ke pesawat terbang, pemindahan tangga, mendorong mundur pesawat terbang, dan penyalaan mesin pesawat terbang (Setiawan, 2019). Setelah semua proses selesai dilakukan pecatatan waktu off block yakni pada saat pesawat menutup pintu dan bersiap untuk melakukan push back (Fatchiyah *et al.*, 2017). Kegiatan ground handling yang dibahas di sisi meliputi menggosongkan area, melepas garbarata/tangga, menyalakan mesin, penumpang naik, pengecekan log book, mengangkut muatan, pemeriksaan keliling, pengisian bahan bakar, pelayanan kabin, pelayanan kamar kecil, pelayanan dapur, membongkar muatan, mengecek log book,penumpang turun, mengatur posisi garbarata, mematikan mesin. Setiap bandara dipastikan mempunyai kapasitas maksimal sehingga dapat mengakomodasi keseluruhan jumlah penerbangan. Kapasitas bandara diharuskan disesuaikan dengan keseluruhan penerbangan di bandara tersebut (Udara *et al.,* 2019). Pada penelitian ini, dibahas jadwal pesawat yang ada di bandara Juanda adalah B739, B738, B735, B734, B 733, A320. ATK72.

Kecepatan, akurasi, dan efisiensi menjadi elemen yang diperhitungkan dalam proses ground handling. Di Bandara Internasional juanda terdapat banyak perusahaan yang memegang penanganan kegiatan ground handling seperti halnya Gapura, JAS, Lion dan masih banyak lagi. Masalah groundhandling merupakan masalah sikronisasi dalam SKD. Pada permasalahan sinkronisasi, kejadian-kejadian (events) yang dialami secara simultan dan harus selesai sesuai batas waktu yang telah ditetapkan sebelumnya (deadline) dan terjadwal (Rudhito, 2014). Penjadwalan ini juga bisa dilakukan Ketika membangun suatu proyek (Susilowati & Hartono, 2023) Runtutan kegiatan groundhandling yang dilakukan secara simultan dan mesti elesai sesuai dengan waktu yang ditentukan supaya tidak terjadi delay dan jadwal keberangkatan tepat waktu.

Aljabar merupakan salah satu cabang Matematika yang dipakai di sebagian besar lini kehidupan. Aljabar biasanya menggunakan variable variable untuk menggantikan bilangan bilangan. Secara umum, aljabar sendiri mempunyai bidang khusus antara lain aljabar dasar, aljabar abstrak dan aljabar terapan. Salah satu struktur aljabar yang lebih banyak penerapannya adalah aljabar max plus. Aljabar max plus merupakan suatu bentuk khusus semiring dengan himpunan $\mathbb{R}_{\varepsilon}$ dengan $\varepsilon = -\infty$ dengan operasi max dan plus dimana $x \oplus y = \max[x, y]$ dan $x \otimes y = x + y$

Seperti halnya aljabar linear, pasangan operasi $(\oplus, \otimes)$ dalam aljabar max plus dapat diperluas ke dalam operasi matriks ataa aljabar max plus. Matriks atas aljabar max plus selanjutnya digunakan dalam merepresentasikan system persamaan linear aljabar max plus yang selanjutnya dicari penyelesaiannya. Representasi system persamaan linear yang dimaksud serupa dalam aljabar linear yakni berupa persamaan matriks $A \otimes x = b$. Berbeda dengan aljabar linear, aljabar maks plus tidak memiliki invers terhadap penjumlahan. Dengan demikian, penyelesaian sistem persamaan linear aljabar max-plus beda dibandingkan dengan sistem persamaan linear dalam aljabar biasa. Penyelesaian sistem persamaan linear aljabar max-plus, jika dibandingkan dalam aljabar biasa, berbeda. Sistem persamaan linear aljabar max plus memiliki penyelesaian yang tidak selalu ada dan bila ada tidak selalu tunggal.

Sistem linear aljabar max-plus sangat membantu dalam memodelkan serta menganalisa Discrete Event System (DES) seperti sistem transportasi, sistem komunikasi, sistem produksi, sistem komputasi paralel, dan sebagainya. Salah satunya yang akan kita uraikan pada penelitian ini mengenai system transportasi pesawat. Menurut Subiono (2013), pendekatan aljabar max- plus diaplikasikan pada sistem yang hanya mempertimbangkan sinkronisasi tanpa konkurensi. Sinkronisasi yang dikaitkan dengan ketersediaan beberapa sumber dalam waktu bersamaan sedangkan konkurensi terlihat ketika pada suatu saat seorang pengguna harus memilih beberapa sumber

Penanganan pesawat di bandara atau sering disebut dengan istilah ground handling merupakan salah satu masalah sinkronisasi. Kegiatan ground handling yang dibahas di sisi meliputi menggosongkan area, melepas garbarata/tangga, menyalakan mesin, penumpang naik, pengecekan log book,dan kegiatan yang lain.

Masing-masing kegiatan memiliki durasi waktu yang berbeda untuk setiap pesawat. Kegiatan- kegiatan ini dilaksanakan secara simultan dan harus dapat diselesaikan pada waktu yang telah ditetapkan. Oleh sebab itu, dibutuhkan penentuan waktu mulai paling lambat untuk setiap kegiatan supaya setiap kegiatan dipastikan telah selesai sesuai waktu keberangkatan (departure time) pesawat-pesawat dari bandara. Jika setiap kegiatan ada yang terjadi tidak sesuai dengan waktu mulai paling lambat maka akan terjadi delay. Masing-masing kegiatan mempunyai durasi waktu yang berbeda untuk setiap pesawat yang berbeda pula. Kegiatan- kegiatan ini dilaksanakan secara simultan dan mesti selesai sesuai waktu yang sudah ditetapkan. Oleh sebab itu, diperlukan penentuan waktu mulai paling lambat untuk setiap kegiatan supaya keseluruhan kegiatan dipastikan telah selesai pada waktu keberangkatan (departure time) pesawat-pesawat dari bandara (Hestuningrum & Ahyudanari, 2019).

Setiap kegiatan mempunyai durasi waktu yang tidak sama pada setiap pesawat. Kegiatan- kegiatan ini dilaksanakan secara simultan mesti selesai pada waktu yang telah ditetapkan. Oleh sebab itu, butuh ditetapkan waktu mulai paling lambat untuk setiap kegiatan supaya setiap kegiatan dipastikan telah selesai pada waktu keberangkatan pesawat yang telah dijadwalkan (departure time) dari bandara. Karena banyak penumpang dan pergerakan pesawat baik komersial atau militer selalu bertambah setiap tahunnya, yang secara tidak langsung pergerakan kendaraan ground handling juga bertambah dalam penanganan pesawat satu dengan yang lainnya. Jika satu kendaraan ground handling saja terlambat berakibat akan mempengaruhi kegiatan kendaraan ground handling serta penerbangan lainnya. Masalah ground handling ini berhubungan dengan masalah penyelesaian sistem persamaan linear $A \otimes x = b$ dimana matriks A menyatakan durasi setiap kegiatan ground handling untuk setiap pesawat, vektor b menyatakan ground time pesawat dan akan ditetapkan vektor x yang menyatakan waktu mulai paling lambat untuk tiap kegiatan ground handling yang akan menentukan waktu selesainya pesawat dapat terbang kembali. Berdasarkan hal tersebut, dalam penelitian ini dilakukan mengkaji sistem persamaan linear aljabar max-plus serta aplikasinya dalam masalah ground handling pesawat dan menganalisisnya

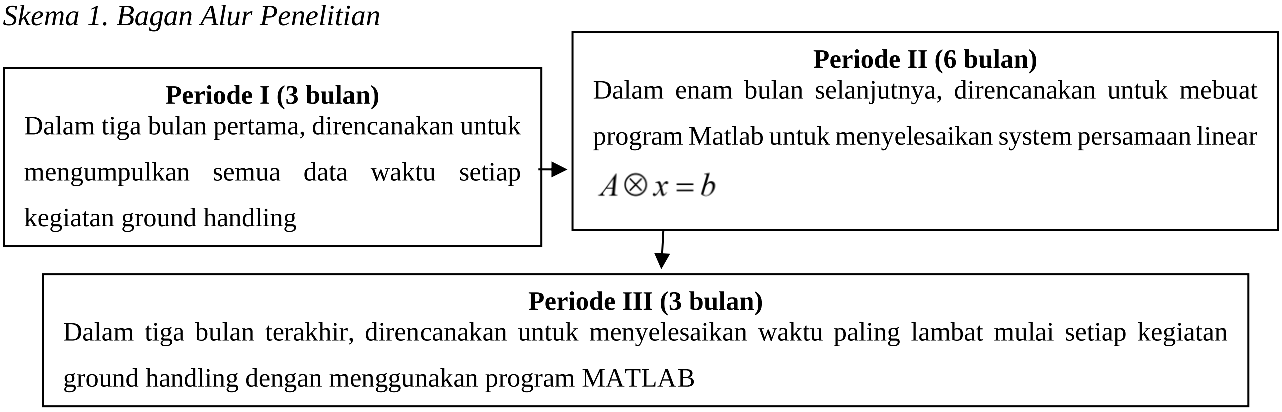
2. METODE PENELITIAN

Tahapan pertama penelitian yang digunakan dengan mengumpulkan beberapa data waktu setiap kegiatan ground handling. Data tersebut diperoleh dari jurnal (Hestuningrum & Ahyudanari, 2019). Tahapan kedua penelitian untuk metode aljabar max plus adalah menyelesaokan system persamaan linear $A \otimes x = b$.

Tahapan selanjutnya adalah membuat program MATLAB untuk menyelesaokan system persamaan linear $A \otimes x = b$ untuk menyelesaikan dimana matriks A berukuran besar, atau dengan kata lain kegiatan ground handlingnya banyak.

Berdasarkan teorema yang dijelaskan di atas

Skema 1. Bagan Alur Penelitian



3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Sistem Persamaan Linear Aljabar Max Plus

Sistem persamaan linear yang akan dibahas pada penelitian ini adalah $A \otimes x = b$ dimana $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}_{\max}^{m}$ dan $m, n \in \mathbb{N}$. Penyelesaian dari system persamaan linear tersebut adalah himpunan semua vector $x \in \mathbb{R}_{\max}^{n}$ sedemikian sehingga memenuhi $A \otimes x = b$. Lebih lannjut system persamaan $A \otimes x = b$ dapat dituliskan lebih rinci sebagai berikut:

$$\otimes x = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (a_{11} \otimes x_1) \oplus (a_{12} \otimes x_2) \oplus \ldots \oplus (a_{1n} \otimes x_n) = b_1 \\ (a_{21} \otimes x_1) \oplus (a_{22} \otimes x_2) \oplus \ldots \oplus (a_{2n} \otimes x_n) = b_2 \\ \vdots \\ (a_{m1} \otimes x_1) \oplus (a_{m2} \otimes x_2) \oplus \ldots \oplus (a_{mn} \otimes x_n) = b_m \end{pmatrix}$$

Penyelesaian dari system persamaan $A \otimes x = b$ dapat diselesaikan denga menyelesaikan system ekuivalen yang terakhir dengan bentuk bakunya

$$A \otimes x = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \max\{(a_{11} + x_1), (a_{12} \otimes x_2), \ldots, (a_{1n} + x_n)\} = b_1 \\ \max\{(a_{21} + x_1), (a_{22} + x_2), \ldots, (a_{2n} + x_n)\} = b_2 \\ \vdots \\ \max\{(a_{m1} + x_1), (a_{m2} + x_2), \ldots, (a_{mn} + x_n)\} = b_m \end{pmatrix}$$

Penyelesaian dari system persamaan linear ini ada beberapa kemungkinan. Peneyelesainnya bisa ada bisa tidak ada. Salah satu contoh dari system oersamaan linear $A \otimes x = b$ tidak mempunyai penyelesaian sebagai berikut :

Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 5 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ dan $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Sistem persamaan linearnya menjadi

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 5 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ sehingga } \begin{pmatrix} \max\{(1 + x_1), (\varepsilon \otimes x_2)\} = 2 \\ \max\{(5 + x_1), (3 + x_2)\} = 3 \\ \max\{(4 + x_1), (5 + x_2)\} = 4 \end{pmatrix}.$$

Bersasarkan system persamaan di atas maka dapat dilihat jika tidak ada nilai $x_2 \in \mathbb{R}_{\max}$ sedemikian mengakibatkan $\max\{(5 + x_1), (3 + x_2)\} = 3$ dan $\max\{(4 + x_1), (5 + x_2)\} = 4$.

Penyelesaian system persamaan $A \otimes x = b$ memang tidak selalu mempunyai peneyelesaian, namun jika system persamaan ini menjadi $A \otimes x \leq_{\max} b$ selalu mempunyai penyelesaian dengan mengambil $x = \varepsilon$. Dengan demikian, penyelesaian system persamaan $A \otimes x = b$ ini dapat dibuat lemah dengan pendefinisian subpenyelesaian terbesar.

Definisi
Sub penyelesaian terbesar adalah vector terbesar x yang memenuhi $A \otimes x \leq_{\max} b$ yang diberi notasi x^*. Sub penyelesaian terbesar tidak harus menjadi penyelesaian dari $A \otimes x = b$.
Teorema berikut merupakan teroema untuk mencari sub penyelesaian terbesar $A \otimes x = b$.

Teorema
Diberikan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ dengan elemen elemen pada setiap kolomnya tidak seluruhnya sama dengan ε dan $b \in \mathbb{R}_{\max}^{m}$ maka
$-x^*_j = \max_i \left(-b_i + a_{ij}\right)$
Untuk setiap $i \in [1, 2, \cdots, m]$ dan $j \in [1, 2, \cdots, \mathrm{n}]$

Teorema
Diberikan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ dengan elemen elemen pada setiap kolomnya tidak seluruhnya sama dengan ε dan $b \in \mathbb{R}_{\max}^{m}$. Sistem persamaan $A \otimes x = b$ memiliki penyelesaian bila dan hanya bila x^* adalah penyelesaiannya.
Perhatikan bahwa

$$-x^*_j = \max_i \left(-b_i + a_{ij}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} \max\{a_{11} - b_1, a_{21} - b_2, \ldots, a_{m1} - b_m\} \\ \max\{a_{12} - b_1, a_{22} - b_2, \ldots, a_{m2} - b_m\} \\ \vdots \\ \max\{a_{1n} - b_1, a_{2n} - b_2, \ldots, a_{mn} - b_m\} \end{pmatrix}$$

Lebih lanjut, diberikan definisi matriks discrepancy dengan notasi dengan $D_{A,b}$ dengan

$$D_{A,b} = \begin{pmatrix} a_{11} - b_1 & a_{21} - b_2 & \ldots & a_{m1} - b_m \\ a_{12} - b_1 & a_{22} - b_2 & \cdots & a_{m2} - b_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} - b_1 & a_{2n} - b_2 & \cdots & a_{mn} - b_m \end{pmatrix}$$

Setiap $-x^*_j$ bisa ditetapkan dari pengambilan nilai maksimum setiap kolom $D_{A,b}$.
Supaya mendapat prediksi jumlah penyelesaian persamaan $A \otimes x = b$, sehingga perlu diberikan definisi matriks $R_{A,b}$ yang merupakan hasil reduksi matriks $D_{A,b}$ didefinisikan sebagai berikut :

$$R_{A,b} = \left[r_{ij}\right] \text{ dengan } r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ jika } \mathrm{d}_{ij} = \text{maksimum kolom j} \\ 0, \text{yang lainnya} \end{cases}$$

Berikut ini contoh penyelesaian $A \otimes x = b$.

Penyelesaian $A \otimes x = b$ jika $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \varepsilon & 6 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Apabila didasarkan matriks A dan vector b maka diperoleh

$$D_{A,b} = \begin{pmatrix} -6 & -7 & -5 \\ -3 & \varepsilon & 3 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \text{ dan } R_{A,b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan $D_{A,b}$ maka diperoleh $x^* = [1, 5, -3]^T$. Tetapi jika diperhatikan $R_{A,b}$ terdapat satu baris di baris pertama yang nol. Sehingga system persamaan $A \otimes x = b$ dengan matriks diatas tidak mempunyai penyelesaian. Jadi $x^* = [1, 5, -3]^T$ hanya merupakan sub penyelesaian terbesar bukan penyelesaian dari system persamaan $A \otimes x = b$.

Jika system persamaan linear $A \otimes x = b$ dengan ukuran matriks yang besar maka pengerjaan perhitungan secara manual maka akan sulit diselesaikan. Oleh karena itu, dibuat program dengan menggunakan MATLAB.

Tabel 1. Waktu yang diperlukan pesawat untuk melakukan kegiatan groundhandling

Kegiatan	Tipe Pesawat						
	B739	B738	B735	B734	B733	A320	ATR 72
Mematikan mesin	1	1	1	1	1	1	1
Mengatur posisi garbata/tangga	1	1	1	1	1	1	0,8
Penumpang turun	10	9	3	3	3	4,4	5,9
Mengecek log book	1,5	1.5	1,5	1,5	1,5	7,3	1,5
Membongkar muatan	11	6	15	15	15	6	6,2
Pelayanan dapur	15	15	16	16	16	12	7,7
Pelayanan kamar kecil	10	10	14	14	14	3,3	7,7
Pelayanan kabin	11	11	19,5	19,5	19,5	18	12
Pengisian bahan bakar	9	9	10	10	10	15,3	17,6
Pemeriksaan keliling	9	9	14	14	14	9	6
Mengangkut muatan	18	9	13	13	13	6	8.7
Pengecekan log book	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
Penumpang naik	15	14	5	5	5	12	6,2
Menyalakan mesin	3	3	2	2	2	3	1,5
Melepas garbata/tangga	1	1	1	1	1	1	1
Mengosongkan area untuk keberangkatan	1	1	1,5	1,5	1,5	1	2,31

Tampilan setelah dirunning menggunakan program MATLAB adalah sebagai berikut :

```
>> solsislinmax
Masukkan matriks A(mxn) = [1 1 10 1.5 11 15 10 11 9 9 18 1.5 15 3 1 1;1 1 9 1.5
15 16 14 19.5 10 14 13 1.5 5 2 1 1.5; 1 1 3 1.5 15 16 14 19.5 10 14 13 1.5 5 2 1
1.5; 1 1 3 1.5 15 16 14 19.5 10 14 13 1.5 5 2 1 1.5; 1 1 3 1.5 15 16 14 19.5 10
14 13 1.5 5 2 1 1.5; 1 1 4.4 7.3 6 12 3.3 18 15.3 9 6 1.5 12 3 1 1 ; 1 0.8 5.9
1.5 6.2 7.7 7.7 12 17.6 6 8.7 1.5 6.2 1.5 1 2.31]

Masukkan matriks b(mx1) = [35; 40; 36 ; 35; 42; 38; 42]

Matriks A =
```

```
  Columns 1 through 11

    1.0000    1.0000   10.0000    1.5000   11.0000   15.0000   10.0000   11.0000
9.0000    9.0000   18.0000
    1.0000    1.0000    9.0000    1.5000   15.0000   16.0000   14.0000   19.5000
10.0000   14.0000   13.0000
    1.0000    1.0000    3.0000    1.5000   15.0000   16.0000   14.0000   19.5000
10.0000   14.0000   13.0000
    1.0000    1.0000    3.0000    1.5000   15.0000   16.0000   14.0000   19.5000
10.0000   14.0000   13.0000
    1.0000    1.0000    3.0000    1.5000   15.0000   16.0000   14.0000   19.5000
10.0000   14.0000   13.0000
    1.0000    1.0000    4.4000    7.3000    6.0000   12.0000    3.3000   18.0000
15.3000    9.0000    6.0000
    1.0000    0.8000    5.9000    1.5000    6.2000    7.7000    7.7000   12.0000
17.6000    6.0000    8.7000

  Columns 12 through 16

    1.5000   15.0000    3.0000    1.0000    1.0000
    1.5000    5.0000    2.0000    1.0000    1.5000
    1.5000    5.0000    2.0000    1.0000    1.5000
    1.5000    5.0000    2.0000    1.0000    1.5000
    1.5000    5.0000    2.0000    1.0000    1.5000
    1.5000   12.0000    3.0000    1.0000    1.0000
    1.5000    6.2000    1.5000    1.0000    2.3100

Matriks b =
    35
    40
    36
    35
    42
    38
    42

Matriks D =
  Columns 1 through 11

  -34.0000  -34.0000  -25.0000  -33.5000  -24.0000  -20.0000  -25.0000  -24.0000
-26.0000  -26.0000  -17.0000
  -39.0000  -39.0000  -31.0000  -38.5000  -25.0000  -24.0000  -26.0000  -20.5000
-30.0000  -26.0000  -27.0000
  -35.0000  -35.0000  -33.0000  -34.5000  -21.0000  -20.0000  -22.0000  -16.5000
-26.0000  -22.0000  -23.0000
  -34.0000  -34.0000  -32.0000  -33.5000  -20.0000  -19.0000  -21.0000  -15.5000
-25.0000  -21.0000  -22.0000
  -41.0000  -41.0000  -39.0000  -40.5000  -27.0000  -26.0000  -28.0000  -22.5000
-32.0000  -28.0000  -29.0000
  -37.0000  -37.0000  -33.6000  -30.7000  -32.0000  -26.0000  -34.7000  -20.0000
-22.7000  -29.0000  -32.0000
  -41.0000  -41.2000  -36.1000  -40.5000  -35.8000  -34.3000  -34.3000  -30.0000
-24.4000  -36.0000  -33.3000

  Columns 12 through 16

  -33.5000  -20.0000  -32.0000  -34.0000  -34.0000
  -38.5000  -35.0000  -38.0000  -39.0000  -38.5000
  -34.5000  -31.0000  -34.0000  -35.0000  -34.5000
```

```
  -33.5000  -30.0000  -33.0000  -34.0000  -33.5000
  -40.5000  -37.0000  -40.0000  -41.0000  -40.5000
  -36.5000  -26.0000  -35.0000  -37.0000  -37.0000
  -40.5000  -35.8000  -40.5000  -41.0000  -39.6900

Matriks R =
     1     1     1     0     0     0     0     0     0     0     1     1     1
1     1     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0
     1     1     0     0     1     1     1     1     0     1     0     1     0
0     1     1
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0
     0     0     0     1     0     0     0     0     1     0     0     0     0
0     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
0     0     0

Penyelesaian sistem adalah
x =
{}

ans =

    '{}'
```

Teorema

Diberikan sistem persamaan $A \otimes x = b$ di mana dengan elemen – elemen $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ pada setiap kolomnya tidak seluruhnya sama dengan ε dan $b \in \mathbb{R}^{m}$.

1. Apabila ada baris nol pada matriks $R_{A,b}$ maka sistem tidak mempunyai penyelesaian.
2. Apabila terdapat paling tidak satu elemen 1 pada tiap baris $R_{A,b}$, maka x^* adalah penyelesaian dari sistem persamaan $A \otimes x = b$.

Berdasarkan pada hasil output MATLAB, maka system tidak memiliki penyelesaian. Vektor $t*$ bukan merupakan penyelesaian sebab berdasarkan matriks R dan teorema di atas maka sistem persamaan $A \otimes x = b$ tidak memiliki penyelesaian. Vektor $t^* = [34 \;\; 34 \;\; 25 \;\; 30.7 \;\; 20 \;\; 19 \;\; 21 \;\; 15.5 \;\; 22.7 \;\; 21 \;\; 17 \;\; 33.5 \;\; 20 \;\; 32 \;\; 34 \;\; 38.5]$ bukan merupakan penyelesaian. Meskipun t^* bukan merupakan penyelesaian yang tepat untuk system persamaan di atas, bukan berarti pesawat akan mengalami penundaan jadwal keberangkatan. Akan tetapi, tidak terpenuhinya persamaan ketiga disebabkan karena penanganan pesawat di gate 3 selesai lebih awal. Penyelesaian seperti ini disebut sebagai penyelesaian tak ideal.

4. KESIMPULAN

Sistem persamaan aljabar max plus $A \otimes x = b$ bisa diaplikasikan ke maslah ground handling di bandara. Pengaplikasiannya ini dengan menentukan waktu mulai paling lambat untuk setiap kegiatan ground handling sehingga secara keseluruhan kegiatan dapat terselesaikan dan pesawat dapat berangkat tepat waktu.

DAFTAR PUSTAKA

Fatchiyah L, Magister P, Dan M, Transportasi R, Sipil JT, Teknik F, et al. Analisis Dampak Delay Yang Terjadi Pada Runway , Apron Analysis the Impact of Delay Runway , Apron and Airspace Aircraft Operations on. 2017;

Fendiyanto P. MENGHITUNG KAPASITAS RUNWAY MENGGUNAKAN PETRI NET DAN ALJABAR MAX-PLUS. J PRIMATIKA. 2019;8(2):101–10.

Hestuningrum HAPL, Ahyudanari E. Manajemen Kendaraan Ground Handling di Terminal 1 Bandara Internasional Juanda. War Ardhia. 2019;44(2):99–106.

Junianti P, Sisca M, Pandey V, Lalamentik LGJ. Analisis Kapasitas Landasan Pacu (Runway) Pada Bandar Udara Internasional Sam Ratulangi Manado. J Sipil Statik. 2020;8(1):83–90.

Rudhito MA. Aljabar max-plus dan penerapannya. 2016;

Setiawan D. Analisis Kapasitas Apron dan Ruang Tunggu Keberangkatan Penumpang Pesawat pada New Yogyakarta International Airport. Semesta Tek. 2019;22(1):31–40.

Susilowati E, Hartono BP. Penjadwalan Proyek Rumah Dengan Menggunakan Metode CPM Pendekatan Aljabar Max Plus. Saintifik. 2023;9(1):7–17.

Udara B, Sastranegara H, Hermansyah MS, Nugraha C. Model Simulasi Untuk Analisis Kapasitas. 2014;02(03):210–21.