SAINTIFIK:
Jurnal Matematika, Sains, dan Pembelajarannya **Vol.5, No.2, Juli 2019, pp. 145~149**
ISSN 2407-4098 (print) DOI:10.31605/saintifik.v5i2.297
ISSN 2622-8904 (online)

Penaksiran Parameter Model SIS Stokastik Penyebaran Penyakit Malaria Dengan Metode Stepest Descent

Darmawati[1], Wahyudin Nur[2], Musafira[3]
[1,2,3]Program Studi Matematika FMIPA Universitas Sulawesi Barat
e-mail: [1]darmath@unsulbar.ac.id, [2]wahyudin.nur@unsulbar.ac.id, [3]Musafira77@yahoo.com

Abstrak

Simulasi numerik dilakukan untuk memperoleh solusi dan gambaran penyebaran penyakit malaria dengan model Susceptible Infected Susceptible (SIS) Stokastik. Laju infeksi penyakitnya dimodelkan mengikuti Distribusi Poisson. Simulasi dilakukan dengan menggunakan data jumlah pasien malaria di kabupaten Majene., Sulawesi Barat. Untuk simulasi numerik, peneliti menaksir parameter model yang mengikuti distribusi poisson dengan menggunakan maksimum likelihood estimator. Untuk menaksir parameter yang memaksimumkan fungsi log likelihoodnya, peneliti menggunakan metode stepest descent. Hasil yang diperoleh adalah Metode Stepest Descent merupakan metode yang sangat cocok digunakan untuk menaksir parameter model karena kecilnya kemungkinan nilai fungsi log likelihood menuju $-\infty$. *Selain itu, metode Stepest Descent lebih memudahkan dalam penentuan parameter awal.*

Kata kunci: *Model SIS, Penyakit Malaria, Maximum Likelihood Estimator, Stepest Descent, Distribusi Poisson.*

1. PENDAHULUAN

Malaria merupakan penyakit yang mengancam jiwa dan menyebabkan banyak kematian. Penyakit ini disebabkan oleh parasit protozoa dari genus plasmodium yang ditularkan kepada manusia melalui gigitan nyamuk anopheles betina yang merupakan inang dari parasit ini (Depkes RI, 2007). Malaria adalah penyakit infeksi utama di dunia yang menginfeksi sekitar 170-300 juta jiwa dengan kematian 1 juta jiwa tiap tahun di seluruh dunia. Sebagian besar kematian terjadi pada anak-anak dan orang dewasa yang non imun di daerah endemis afrika dan asia (Harijanto, 2010). Berbagai penelitian terkait penyakit menular terus dilakukan oleh berbagai pihak mulai dari peneliti dibidang kesehatan hingga peneliti dibidang matematika. Penelitian terkait kesehatan dan matematika biasanya mengkaji model penyebaran penyakit menular seperti penyakit DBD (Nur, Wahyudin dkk 2018), malaria (Darmawati, 2019) maupun penyakit tidak menular seperti penyakit diabetes. Model matematika yang digunakan untuk mengetahui penyebaran suatu penyakit di daerah tertentu dikenal sebagai model epidemik deterministik.

Selain model deterministik, beberapa peneliti juga telah menggabungkan model deterministik dengan model stokastik. Model penyebaran penyakit malaria yang menggabungkan antara stokastik dan deterministik seperti yang akan dibahas dalam artikel ini disebut dengan model SIS Stokastik (Darmawati, 2019). Data pasien berdistribusi Poisson dengan tingkat laju infeksi penyakit perlu ditaksir dengan menggunakan metode penaksiran parameter. Metode yang dapat digunakan untuk menaksir parameter dari data yang berdistribusi poisson dapat menggunakan metode momen ataupun maximum likelihood estimator (Bolstad, 1998). Untuk mempermudah proses penaksiran parameter, biasanya digunakan metode numerik. Apabila menggunakan maximum likelihood estimator, maka metode yang akan digunakan sebaiknya adalah metode yang dapat menentukan variabel yang memaksimumkan fungsi (Sirait, dkk 2013). Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk menentukan variabel yang memaksimumkan atau meminimumkan fungsi, diantaranya yakni metode newton raphson ataupun stepest descent (Utomo, 2016).

2. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah dengan studi literatur untuk mengetahui informasi-informasi yang berkaitan dengan penyakit Malaria dan metode yang dapat digunakan untuk meminimumkan fungsi. Langkah selanjutnya adalah mengunjungi instansi terkait dalam hal ini mengunjungi Dinas Kesehatan Kabupaten Majene untuk mendapatkan data penderita penyakit Malaria mengecek kecocokan distribusi dan dilanjutkan dengan menaksir parameter yang meminimumkan fungsi likelihoodnya. Parameter taksiran kemudian dimasukkan ke dalam model dan digunakan untuk melakukan simulasi numerik.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

model SIS Stokastik yang digunakan adalah sebagai berikut:

$$\frac{dS(t)}{dt} = A - \lambda_t - \varphi S(t) + \gamma I(t)$$
$$\frac{dI(t)}{dt} = \lambda_t - \gamma I(t) \qquad \ldots (3.1)$$

dengan laju infeksi dalam populasi dari data $\left(\lambda_t\right)$ yang berdistribusi Poisson yaitu $\lambda_t = \mu + \alpha\lambda_{t-1} + \beta y_{t-1}$ dan fungsi likelihood untuk distribusi Poisson adalah sebagai berikut

$$L\left(\mu,\alpha,\beta\right) = \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^{y_1}}{y_1!} \times \frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{y_2}}{y_2!} \times \ldots \times \frac{e^{-\lambda_t}\lambda_t^{y_t}}{y_t!}$$
$$= \prod_{t=2}^{T} \frac{e^{-\lambda_t}\lambda_t^{y_t}}{y_t!}$$

dengan fungsi log-likelihoodnya adalah

$$\ln L = \sum_{t=2}^{T} \ln \frac{e^{-\lambda t}\lambda_t^{y_t}}{y_t!}$$

$$= \sum_{t=2}^{T}\left(-\lambda_t\right) + \sum_{t=2}^{T} y_t \ln \lambda_t - \sum_{t=2}^{T} \ln\left(y_t!\right)$$

Setelah mendapatkan fungsi log likelihoodnya, penaksiran parameter dilakukan dengan menggunakan metode Stepest Descent.

a. $F\left(\mu,\alpha,\beta\right) = \ln L = \sum_{t=2}^{T} -\left(\mu + \alpha\lambda_{t-1} + \beta y_{t-1}\right) + \sum_{t=2}^{T} y_t \ln\left(\mu + \alpha\lambda_{t-1} + \beta y_{t-1}\right) - \sum_{t=2}^{T} \ln\left(y_t!\right)$

merupakan fungsi log likelihood yang akan diminumkan.

b. Ambil $\lambda_1 = \left(\mu_1, \alpha_1, \beta_1\right) \in \mathbb{R}^3$ sebarang nilai awal dan ε merupakan suatu konstan yang menyatakan besarnya kesealahan atau error yang ditoleransi.

c. Tentukan $\partial F(\lambda_1) = \partial(\mu_1, \alpha_1, \beta_1)$ dimana $\partial F(\mu,\alpha,\beta) = \left(\frac{\partial F(\mu,\alpha,\beta)}{\partial \mu}, \frac{\partial F(\mu,\alpha,\beta)}{\partial \alpha}, \frac{\partial F(\mu,\alpha,\beta)}{\partial \beta} \right)$. $\partial F(\lambda_1)$ merupakan gradien fungsi F saat λ_1.

d. Jika $\left\| \partial F(\lambda_k) \right\| < \varepsilon$ maka iterasi berhenti. Sebaliknya, bila syarat tersebut tidak terpenuhi maka iterasi dilanjutkan.

e. Cari λ_k dengan mencari titik esktrim $F(\lambda_k + \pi_k d_k)$ dengan cara menurunkan $F(\lambda_k + \pi_k d_k)$ dan menyamakannya dengan nol. d_k adalah arah pencarian akar dengan $d_k = -\partial F(\lambda_k)$. Dan $\pi_k = \frac{g_k^T g_k}{g_k^T A g_k}$ dimana A merupakan matriks Hessian. Matriks Hessian A dapat dituliskan.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial \mu \partial \alpha} & & \frac{\partial^2 F}{\partial \mu \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \mu^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial \alpha^2} & & \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta} \\ & & & \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \beta \partial \mu} & \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta \partial \alpha} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} \end{pmatrix}$$

f. Nilai λ_{k+1} ditentukan dengan menggunakan rumus $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \pi_k d_k$.

Adapun simulasi numerik yang dilakukan untuk mendapatkan nilai fungsi likelihood adalah sebagai berikut:

Tabel 1. Hasil Simulasi

	Parameter Awal	**Parameter Taksiran**	**Nilai Fungsi Log Likelihood**

Simulasi Pertama	alpa=0.04;
	miu=0.005;
	beta=0.003;
		alpa = 0.2088
		beta = 0.7988
		miu = 0.0546
			-157.2054

Simulasi Kedua	alpa=0.05;
	miu=0.006;
	beta=0.003;
		alpa = 0.2184
		beta = 0.7913
		miu =0.0551
			-157.1173

Simulasi Ketiga	alpa=0.045;
	miu=0.0055;
	beta=0.003;
		alpa = 0.2130
		beta =0.7943
		miu = 0.0548
			-157.1571

Simulasi Keempat	alpa=0.035;
	miu=0.0045;
	beta=0.003;
		alpa =0.2067
		beta =0.8058
		miu =0.0546
			-157.2675

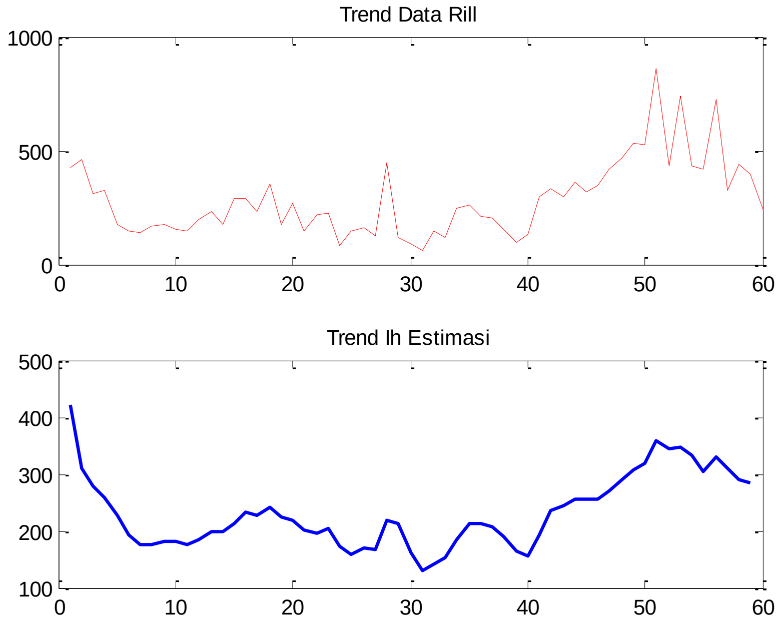
Simulasi Kelima	alpa=0.045;
	miu=0.0057;
	beta=0.003;
		alpa =0.2105
		beta =0.7925
		miu =0.0547
			-157.1469

Simulasi Keenam	alpa=0.035;
	miu=0.0047;
	beta=0.003;
		alpa = 0.2045
		beta =0.8031
		miu =0.0546
			-157.2523

Simulasi Ketujuh	alpa=0.03;
	miu=0.0048;
	beta=0.003;
		alpa =0.1985
		beta =0.8060
		miu =0.0547
			-157.2921

Simulasi Kedelapan	alpa=0.037;
	miu=0.0052;
	beta=0.003;
		alpa =0.1905
		beta =0.8165
		miu =0.0519
			-157.4076

Berdasarkan hasil penaksiran parameter pada tabel di atas, simulasi kedelapan merupakan simulasi yang menghasilkan nilai log likelihood terkecil. Oleh karena itu, λ yang diperoleh dengan nilai parameter awal $\alpha = 0.037, \beta = 0.0003, \mu = 0.052$ digunakan untuk simulasi model yang hasilnya sesuai gambar berikut.



Gambar 1. Perbandingan Trend Data Rill dan Tren Ih Estimasi

Dari hasil simulasi numerik model, perbandingan antara tren Ih Estimasi sudah menyerupai tren data rill meskipun tidak sepenuhnya sama. Hal ini terjadi karena adanya nilai galat toleransi saat menaksir parameter λ sebesar 0.001. Ih merupakan jumlah penderita malaria. Meskipun tidak sepenuhnya sama, hasil ini menunjukkan bahwa model dengan menggunakan laju infeksi (penaksir likelihood λ) sudah cukup baik dalam memberikan gambaran terkait kasus malaria yang terjadi di lapangan. Dalam artikel ini, penulis menggunakan data bulanan dan jumlahnya terbatas. Kondisi ini mengakibatkan kurva yang dihasilkan kurang halus dan data harus ditransformasi (jumlah data pasien tiap bulan besar). Penulis kesulitan menentukan jenis transformasi yang akan digunakan untuk mentransformasi data. Diharapkan peneliti lain agar menggunakan data harian dengan jumlah data yang lebih banyak.

4. KESIMPULAN

Metode Stepest Descent merupakan metode yang sangat cocok digunakan untuk menaksir parameter model karena kecilnya kemungkinan nilai fungsi log likelihood menuju $-\infty$. Selain itu, metode Stepest Descent lebih memudahkan dalam penentuan parameter awal.

DAFTAR PUSTAKA

Depkes RI. 2007. Penyelidikan dan Penanggulangan Kejadian Luar Biasa. Jakarta: Ditjen P2PL.

Harijanto, P.N, Gejala Klinik Malaria Ringan. Dalam: Harijanto, P.N, ed. Malaria dari Molekuler ke klinis. edisi 2. Jakarta: EGC; 2010.

Nur, Wahyudin, dkk. 2018. SIR Model Analysis for Transmission of Dengue Fever Disease with Climate Factors Using Lyapunov Function. Proceeding on International Conference on Statistics, Mathematics, Teaching, and Research (ICSMTR 2017). 9-10 Oktober 2017. Makassar, Indosesia.

Darmawati dan Nur, Wahyudin. Model SIS Stokastik pada Penyakit Malaria Berdasarkan Distribusi Data Pasien. 2019. SAINTIFIK; 5(1):53-57.

Bolstad, BM. Comparing some iterative methods of parameter estimation for censored gamma data. 1998. Thesis. The University of Wakaito

Sirait, Haposan dan Rustam, Effendy. Penaksir Maksimum Likelihood dengan Metode Iterasi Newton Raphson. 2013. Prosiding Seminar "Semirata 2013: 247-251.

Utomo, RB. Metode Numerik Stepest Descent Terinduksi Newton dalam Pemecahan Masalah Optimasi Tanpa Kendala. 2016. Mosharafa;5(3): 187-194.